1. Conjuntos

Ejercicio 1.1

Determinar los siguientes conjuntos por extensión y por comprensión:

1. A es el conjunto formado por los cuadrados de los primeros diez números naturales.
2. B es el conjunto formado por las raíces cuadradas de los primeros cincuenta naturales y que además sean naturales.
3. C es el conjunto formado por los naturales múltiplos de tres que además son menores que diecisiete o múltiplos de cinco que además son menores que treinta.

Ejercicio 1.2

Determinar todos los elementos de los siguientes conjuntos:

1. $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 5\}$
2. $B = \{n \in \mathbb{N} : n^2 \leq 12\}$
3. $C = \{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$
4. $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x + 2 = 0\}$

Ejercicio 1.3

Determinar todos los elementos de los siguientes conjuntos:

1. $A = \left\{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$
2. $B = \left\{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$
3. $C = \left\{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$
4. $B = \left\{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$
5. $D = \left\{\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$
6. $E = \left\{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$

Nota: $A \setminus B$ denota el conjunto formado por los elementos de A que no son elementos de B (diferencia de conjuntos).

Ejercicio 1.4

Consideremos $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ y $B = \{2, 3, 4, 5, 7, 9\}$. Hallar $A \setminus B$, $A \cap B$, $A \cup B \setminus \{2, 3, 4\}$.

Ejercicio 1.5

Dados $B = \{x \in \mathbb{N} \;:\; 2 \text{ divide } x \text{ y } 3 < x < 9\}$ y $C = \{x \in \mathbb{N} : 3 < x < 9\}$.
Hallar todos los conjuntos D que verifican simultáneamente $D \subset C$, $\{6, 7\} \subset D$ y $B \cap D = \{6, 8\}$.

2. Lógica

Ejercicio 2.1

Negar las frases:

1. Todos los fines de semana voy a ver algún deporte.
2. Algún jueves del año no voy a jugar al fútbol.
3. Algún jueves del año voy a jugar al fútbol.
4. Todos los domingos cocino pasta.

Ejercicio 2.2

Completar el cuadro siguiente:

$\mathcal{P}$	no $\mathcal{P}$
Las rectas $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'$ son perpendiculares.	
Las rectas $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'$ son paralelas.	
13=12	
$x \in \mathbb{N}$.	
$x \neq 1$.	
$x > 0$.	
$x \leq 1$	
$x - 2 = 0$	

Ejercicio 2.3

Consideramos dos frases P y Q. Las frases “si P entonces Q” y “si no Q entonces no P” son ambas verdaderas (o ambas falsas) al mismo tiempo.
La frase “si no Q entonces no P” se llama **contrarecíproco** de la frase “si P entonces Q”.

Escribir el contrarecíproco de cada una de las frases siguientes:

1. Si es el 1ero de enero entonces el museo está cerrado.
2. Si es un número entero y múltiplo de 6 entonces es un múltiplo de 3.
3. Si un número es mayor que 7 entonces es mayor que 4.
4. Si $x > 0$ entonces $x + 4 > 0$.

5. Si un triangulo ABC es rectángulo en A entonces $BC^2 = AC^2 + AB^2$.

Ejercicio 2.4

Las expresiones **"existe al menos un..."** y **"para todo..."** se utilizan para precisar cuántos elementos de un conjunto verifican una proposición, si son todos o algunos. En matemática el "existe" se denota con el simbolo "$\exists$", el "para todo" con el simbolo "$\forall$" y reciben el nombre de cuantificadores.

Completar con un cuantificador las proposiciones siguientes para que sean verdaderas:

1. $(x+1)^2 = x^2 + 1$.
2. $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.
3. $a(b-c) + b(c-a) + c(a-b) = 0$.
4. $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$.

3. Algebra

3.1. Operatoria básica

Ejercicio 3.1

Expresar en forma reducida cada uno de los siguientes números.

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$
2. $4\left(\frac{1}{3}\right)$
3. $\frac{-3}{5}\left(\frac{2}{3} - 1\right) - \frac{4}{3}$
4. $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$
5. $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}}$
6. $\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\right)$
7. $\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3}\right)^3$
8. $\left(\frac{2^3}{3^3}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^2$
9. $\left(\frac{1/3}{2/5}\right)^{-2}$
10. $3! + \frac{1}{3!}$
11. $\frac{5!}{2!+3!}$
12. $\frac{6!}{2!3!}$

Ejercicio 3.2

Calcular simplificando la respuesta lo más posible. Expresar el resultado como una sola fracción reducida.

1. $\frac{3}{5} - \frac{4}{3}$
2. $\frac{x}{yz} + \frac{y}{z}$
3. $\frac{3x}{5y} + \frac{4x}{2y^2}$
4. $\frac{3}{5} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{2}$
5. $\frac{3}{4(x+1)} - \frac{7}{2(x-1)}$
6. $\frac{\left(\frac{x^2-4}{x+1}\right)}{\left(\frac{x+2}{3x-5}\right)}$
7. $\frac{xy}{yz} - \frac{y}{z}$
8. $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$
9. $\frac{1+\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}-1}$
10. $\frac{x+\frac{y}{z}}{\frac{y}{z}-z}$

Ejercicio 3.3

Simplificar los siguientes radicales

1. $\sqrt{32}\sqrt{2}$
2. $\frac{\sqrt[3]{-2}}{\sqrt[3]{54}}$
3. $\frac{\sqrt[4]{32x^4}}{\sqrt[4]{2}}$
4. $\sqrt{xy}\sqrt{x^3y}$
5. $\sqrt{16a^4b^3}$
6. $\frac{\sqrt[5]{96a^6}}{\sqrt[5]{3a}}$

Ejercicio 3.4

Factorizar las siguientes expresiones:

1. $2x + 12x^3$
2. $5ab - 8abc$
3. $x^2 + 7x + 6$
4. $x^2 - x - 6$
5. $x^2 - 2x - 8$
6. $2x^2 + 7x - 4$
7. $9x^2 - 36$
8. $8x^2 + 10x + 3$
9. $6x^2 - 5x - 6$
10. $x^2 + 10x + 25$
11. $t^3 + 1$
12. $4t^2 - 9s^2$
13. $4t^2 - 12t + 9$
14. $x^3 - 27$
15. $x^3 + 2x^2 + x$
16. $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$
17. $x^3 + 3x^2 - x - 3$

3.2. Ecuaciones e inecuaciones

Ejercicio 3.5

Indicar si las siguientes ecuaciones son verdaderas para todo valor de la variable x:

1. $\sqrt{x^2} = x$
2. $\sqrt{x^2 + 4} = |x| + 2$
3. $\frac{x}{x+y} = \frac{1}{1+y}$
4. $\frac{16+a}{16} = 1 + \frac{a}{16}$
5. $\frac{1}{x^{-1}+y^{-1}} = x + y$
6. $\frac{2}{4+x} = \frac{1}{2} + \frac{2}{x}$
7. $(x^3)^4 = x^7$
8. $6 - 4(x + a) = 6 - 4x - 4a$

Ejercicio 3.6

Determinar para qué valores de x son ciertas las siguientes inecuaciones.

1. $4x - 2 > 3$
2. $x^2 + 4x + 1 \geq 0$
3. $x(x - 1)(x - 2)(x - 3) < 0$
4. $4 - 3x \geq 6$
5. $1 + 5x > 5 - 3x$
6. $0 \leq 1 - x < 1$
7. $\frac{2-x}{1+x} \leq 0$
8. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > 0$

9. $\frac{x}{x-1} < \frac{2x+1}{x}$
10. $\sqrt{x+4} < x$
11. $\sqrt{x^2+1} > 2x-3$
12. $3|x| - |x-2| > 2$

Ejercicio 3.7

Resolver las siguientes desigualdades:

1. $|x| < 3$
2. $|x| \geq 3$
3. $|x-4| < 1$
4. $|x+5| \geq 2$
5. $|2x-3| \leq 0{,}4$
6. $|5x-2| < 6$

Ejercicio 3.8

Resolver en $\mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones y expresarlas de forma factorizada si es posible:

1. $x^2 + 9x - 10 = 0$
2. $x^2 + 9x - 1 = 0$
3. $x^2 - 2x - 7 = 0$
4. $x^3 - 2x + 1 = 0$
5. $x^3 + 3x^2 + x - 1 = 0$
6. $x^2 - 7x = 0$
7. $6x^2 + 36x = 0$
8. $-2x^2 = 8x$
9. $x^2 + 6x - 1 = (x-1)(x+7)$
10. $x^2 - \frac{7}{2}x + 2 = 10x^2 - \frac{3}{2}x - 1$

Ejercicio 3.9

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = 2 \\ x - \frac{y}{4} = 1 \end{cases}$

Ejercicio 3.10

Calcular las raíces de los siguientes polinomios.

1. $P(x) = x^3 + 2x$
2. $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$, sabiendo que 2 es raíz.

3. $P(x) = 8x^3 + 14x^2 - 5x - 2$ sabiendo que $\frac{1}{2}$ es raíz.

4. Combinatoria

Ejercicio 4.1

Se quiere colorear una bandera de tres franjas utilizando los siguientes colores: amarillo, verde, rojo y azul.

1. ¿De cuántas puede hacerse?
2. ¿Y si no se pueden repetir los colores?
3. ¿Y si los colores de las franjas contiguas deben ser distintos?
4. ¿Y si los colores de la primera y última franja deben ser diferentes?
5. ¿Cuántas de las posibilidades de la parte 1 tienen los mismos colores pero en un orden distinto?
6. ¿Cuántas de las posibilidades de la parte 2 tienen los mismos colores pero en un orden distinto?

Ejercicio 4.2

La matrícula en Uruguay consiste de tres letras y cuatro números.

1. ¿Cuántos vehículos pueden registrarse si no se permite que se repita ninguna letra o número?
2. ¿Cuántos se podrían registrar en caso que se permitan repeticiones?
3. En caso en que se permitan repeticiones, ¿cuántas de las matrículas tienen solo vocales y números pares?

Ejercicio 4.3

1. En una pastelería hay 6 tipos de pasteles. ¿De cuántas formas pueden elegirse 4?
2. ¿Cuántos números se pueden representar en el sistema binario de 6 bits si el primer dígito es 1 y los últimos 2 son ceros?

5. Funciones

Ejercicio 5.1

Consideremos las siguientes funciones:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que $g(x) = x^2$.
3. $h : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x^2$.
4. $i : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que $i(x) = x^2$.

Estudiar inyectividad, sobreyectividad y biyectividad.

Ejercicio 5.2

1. Se considera $X = \{-3, -1, 0, 2, 4, 7\}$ como dominio de f y $B = \{-2, -1, 0, 1, 3, \pi, 8, 10\}$ tal que $f(-3) = 0,\ f(-1) = 8,\ f(0) = \pi,\ f(2) = 8,\ f(4) = 3,\ f(7) = 1$. Representar mediante un diagrama de flechas y efectuar el gráfico de f en un sistema de ejes cartesianos.
2. Se considera $g : \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{(2x+1)^2}{x^2-2x}$, calcular $g(1), g(-1), g(3), g(-\sqrt{3}), g(-\pi), g(1/3), g(x+1), g(x-1)$.
3. Sea $j : \mathbb{R}\setminus\{-3\} \to \mathbb{R}$ tal que $j(x) = \frac{x^2+x}{x+3}$ y $k : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $k(x) = \frac{1}{x}$. Determinar si son posibles las siguientes composiciones, en caso contrario determinar una función de dominio más amplio posible cuya regla de asignación sea la que se obtendría mediante la composición.

   a) $j \circ k$

   b) $k \circ j$

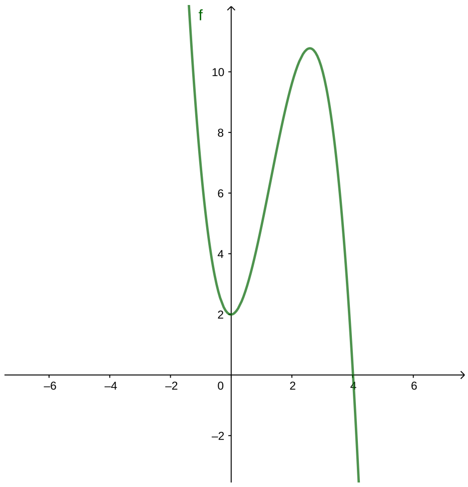
   c) $j(cx),\ \ c \in \mathbb{R}$

   d) $k(cx),\ \ c \in \mathbb{R}$

Ejercicio 5.3

Se considera $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que su gráfico se representa en la siguiente figura:
Sin encontrar la expresión de f, hallar el gráfico de las siguientes funciones:

1. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = f(x) + 1$.
2. $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $i(x) = f(x) - 2$.
3. $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $j(x) = f(x + 1)$.
4. $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $l(x) = f(x - 1)$.



5. $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $m(x) = f(-x)$.
6. $n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $n(x) = -f(x)$.
7. $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $r(x) = -f(-x)$.
8. $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $p(x) = 2f(x)$.

Ejercicio 5.4

Graficar las siguientes funciones:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$
3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ -3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$
4. $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $i(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si} \quad x < -1 \\ 0 & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$
5. $j : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ tal que $j(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x < 2 \\ x+2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$
6. $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $k(x) = \begin{cases} -5 & \text{si} \quad x = 1 \\ x^2-1 & \text{si} \quad x \neq 1 \end{cases}$
7. $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $l(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Ejercicio 5.5

Para los siguientes pares de funciones calcular $f \circ g$, $g \circ f$ y $f + g$.

1. $f(x) = 2x + 1$, $\quad g(x) = x^3 - x^2 - 4$
2. $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \leq 0 \\ x-1 & 0 < x \end{cases}$, $\quad g(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ 2x & 0 < x \end{cases}$
3. $f(x) = |2x + 1|$, $\quad g(x) = x^2 + x + 1$

Ejercicio 5.6

Escribir los siguientes enunciados en lenguaje matemático:

- f es una función de dominio y codominio el conjunto de los reales, tal que para todo elemento real entre -1 y 1, se tiene que su imagen funcional está entre 0 y 1.
- f es una función de dominio $A \subset \mathbb{R}$ y codominio $B \subset \mathbb{R}$, tal que para todo elemento del codominio existe una preimagen en el dominio.
- f es una función de dominio y codomino reales que tiene máximo y mínimo.
- f es una función de dominio $A \subset \mathbb{R}$ y codominio $B \subset \mathbb{R}$ que tiene dos raíces.

6. Funciones: límites y continuidad

6.1. Límites

Ejercicio 6.1

Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x \to 1} x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
2. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^4-2x^3}{x^3-x^2}$
4. $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^2-a^2}{x-a}$
5. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{|x-3|}{x-3}$
6. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$
7. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-x}{x-1}$
8. $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^n-a^n}{x-a}$
9. $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
10. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)^2}{x}$

Ejercicio 6.2

Determinar existencia de los siguientes límites, y en caso de existencia calcularlos.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+3-(2(x+5)+3)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{(2(x+5)+3)}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^2}{x^2}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2+x-1}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^4-x^3+1}-\sqrt{x^4+15x^2-5}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(x+1)-\sin(x)$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \log(x+1)-\log(x)$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x+1}-e^{x}$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \log(2x)-\log(x)$
11. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x}-\sqrt{x}$
12. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\sqrt{x+1}}-e^{\sqrt{x}}$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\sqrt{x+1}\right)-\sin\left(\sqrt{x}\right)$

6.2. Continuidad

Ejercicio 6.3

Determinar qué condiciones deben cumplir $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función f sea continua:

1. $f(x) = \begin{cases} x^2+3x+2 & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2+bx+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} \log(x+1) & \text{si } x > 0 \\ (x+a)^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{si } x < 1 \\ ax+b & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ a\sin(x+b) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Ejercicio 6.4

Determinar existencia de máximo y mínimo de las siguientes funciones en $\mathbb{R}$. En caso de que existan, calcularlos:

1. $f(x) = x^2+2$
2. $f(x) = x^3+x^2+x+1$
3. $f(x) = x^4+x^2-4$
4. $f(x) = \sin^2(x)$
5. $f(x) = |x^9-5x^7+x-3|$
6. $f(x) = \frac{x^5+x^3+2}{x^2+1}$
7. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

Ejercicio 6.5

Para cada una de las siguientes funciones decida cúales están acotadas superior o inferiormente en el intervalo que se indica, y cuáles alcanzan su valor máximo o mínimo.

1. $f(x) = x^2$ en $(-1, 1)$

2. $f(x) = x^2$ en $\mathbb{R}$

3. $f(x) = x^2$ en $[0, +\infty)$

4. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq a \\ a+2 & \text{si } x > a \end{cases}$ en $(-a-1, a+1)$ con $a > -1$

6.3. Derivadas

Ejercicio 6.6

Calcular la derivada de las siguientes funciones cuya expresión es:

1. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$
2. $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$
3. $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^4+x^2+1}$
4. $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$
5. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$
6. $f(x) = \left(\sqrt[5]{x}+1\right)^2$
7. $f(x) = \sin^3(x)$
8. $f(x) = \sin\left(x^3\right)$
9. $f(x) = \sin(\cos(x))$
10. $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
11. $f(x) = \sin\left(e^{\frac{x+1}{x-2}}\right)$
12. $f(x) = \sin\left(\frac{\cos(x)}{x}\right)$
13. $f(x) = \left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{\frac{1}{3}}$
14. $f(x) = x\log(x) - x$
15. $f(x) = e^{\frac{1}{x^2+1}}$

Ejercicio 6.7

Hallar f' en función de g y g' para los siguientes ejemplos

a) $f(x) = g(x) + (x-a)$ *b*) $f(x) = g(x)(x-a)$ *c*) $f(x) = g(a)(x-a)$

d) $f(x) = g(x+g(a))$ *e*) $f(x) = g(xg(a))$ *f*) $f(x) = g(x+g(x))$

g) $f(x+3) = g(x^3)$ *h*) $f(x^3) = g(x+g(x))$

Ejercicio 6.8

En cada uno de los siguientes casos, calcular y graficar la recta tangente de la función f en el punto p

a) $f(x) = x^2,\ p = (3,9)$ *b*) $\cos(x),\ p = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

c) $\frac{x}{x^2+1},\ p = (0,0)$ *d*) $f(x) = \sqrt{9+x^2},\ p = (4,5)$

Ejercicio 6.9

Calcular los extremos de las siguientes funciones en los dominios indicados

a) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en $[-2, 2]$ *b*) $f(x) = x^5 + x + 1$ en $[-1, 1]$

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ en $\left[-1, \dfrac{1}{2}\right]$ *d*) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ en $[0, 5]$

Ejercicio 6.10

Bosquejar funciones f con derivada segunda tal que

1. Los signos de f' y f'' sean positivo en todo $\mathbb{R}$
2. El signo de f' sea positivo y el signo f'' sea negativo en todo $\mathbb{R}$
3. El signo de f' sea negativo y el signo f'' sea positivo en todo $\mathbb{R}$
4. Los signos de f' y f'' sean negativo en todo $\mathbb{R}$

Ejercicio 6.11

Sean f y g dos funciones reales de las que se sabe que: $f(2) = 1$, $g(2) = 3$, $f'(2) = -1$, $g'(2) = 3$. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, justificando.

1. $(f + g)'(2) = 2$
2. $(f.g)'(2) = 3$
3. g es continua en $x = 2$
4. siendo $h : h(x) = x + f(x)$, se cumple que $h'(2) = 0$

Ejercicio 6.12

Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3 - 6x + 8x$.

1. Demostrar que la recta de ecuación $y = -x$ es tangente al gráfico de f y determina el punto de tangencia.
2. ¿La recta corta al gráfico de f en otro punto? Justificar.

Ejercicio 6.13

Sea $g : \mathbb{R} \setminus \{-4\} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = (a - x)\ln|x + 4|$. Hallar a sabiendo que la recta de ecuación: $8x + y = -24$ es tangente al gráfico de g en $x = -3$.

Ejercicio 6.14
Se lanza, hacia arriba verticalmente un proyectil a una velocidad de $80m/s$, su altura en función del tiempo está dada por la expresión

$$h(t) = 80t - 16t^2$$

1. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil?
2. ¿Cuál es la velocidad del proyectil cuando está a 96 metros de altura, subiendo? ¿y bajando?

7. Trigonometría

Ejercicio 7.1
Dibujar la gráfica de la función $y = 3\sin(\pi x)$. Para ello, construye una tabla de valores como la siguiente:

x					
πx	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin(\pi x)$					
y					

Da primero valores a πx. Luego calcula x despejando y obten los valores de $\sin \pi x$. Calcula por último, el valor de y multiplicando por 3 los últimos valores obtenidos y representa gráficamente.

Ejercicio 7.2
Dibujar por el mismo procedimiento del ejercicio anterior, las gráficas de las funciones:

$$a)\ y = 2\cos(\pi x);\quad b)\ y = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right);\quad c)\ y = 2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right);\quad d)\ y = \sin(2x)$$

Intenta sacar algunas conclusiones sobre las gráficas de las funciones $y = a\sin(kx)$ e $y = a\cos(kx)$. ¿Cómo influyen los valores de a y de k en ellas?

Ejercicio 7.3
En un par de ejes cartesianos bosquejar los siguientes elementos.

1. Las rectas determinadas por los pares de puntos

   a) $(0,0)$; $(1,1)$ *b*) $(2,3)$; $(3,2)$ *c*) $(-1,2)$; $(-1,-1)$ *d*) $(2,2)$; $(-1,-1)$

2. Los semiplanos dados por las siguientes inecuaciones

   a) $x+y \leq 2$ *b*) $x-y \geq -1$ *c*) $y \geq 0$ *d*) $2x-3y \geq 0$ *e*) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3} \geq 1$

Ejercicio 7.4

Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en $(2, -3)$ y es tangente al eje de abscisas.

8. Aplicaciones

Ejercicio 8.1 (Descuentos y porcentajes)

1. Juan decide comprarse un celular nuevo, luego de ver distintos modelos selecciona su favorito. Dos casas de telefonía, Alfa y Bravo venden ese celular a $U\$S$ 900.

   La casa Alfa al entrar en su semana aniversario decide hacer un descuento del 20 %. Sin embargo la casa Bravo decide no quedarse atrás y realiza un descuento del 40 %. Para no perder clientela Alfa decide realizar un nuevo descuento del 20 %.

   ¿Donde debería comprar Juan su celular?

2. Si usted es un mayorista que compra un producto en \$20, ¿a cuánto deberá venderlo para obtener una ganancia del 15 % de su precio de venta?

3. Un Shopping decide quitar el IVA a todos sus productos, realizando un descuento del 18.03 %. Sin embargo el impuesto IVA aumenta en un 23 % el costo del producto. ¿Es esta una publicidad engañosa?

Ejercicio 8.2 (Concentraciones)

Se tienen dos soluciones de salmuera, la solución A contiene 5 % de sal mientras que la solución B contiene un 20 %. ¿Cuantos mililitros de cada solucion debe mezclar para obtener un litro de una solución con una concentración de 16 % de sal?