Matemática Discreta 1, Curso 2020 - Clase 6 (18/03)

En la clase anterior vimos:

- Combinaciones con repetición: deducimos la fórmula a partir de la fórmula para el número de composiciones, vimos ejemplos y algunas variantes para la fórmula de las composiciones: con restricciones de la forma $x_i \leq c_i$ y desigualdades del tipo $x_1 + \cdots + x_m \leq n$.

Demostraciones combinatorias

Cerraremos el tema de combinatoria viendo algunos ejemplos de las llamadas demostraciones combinatorias (o sea, como usar un argumento combinatorio para probar alguna identidad). Recordemos que el cardinal de un conjunto A es denotado por $\#A$ ó $|A|$.

Ejemplo. Probar la identidad $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

Solución. Como vimos anteriormente, 2^n es la cantidad de subconjuntos de un conjunto de tamaño n. Podemos considerar por ejemplo $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $\mathcal{P} = \{X : X \subseteq I\}$, de donde $\#\mathcal{P} = 2^n$. Por otro lado podemos descomponer $\mathcal{P}$ como la unión de subconjuntos disjuntos $\mathcal{P} = \cup_{i=0}^{n} \mathcal{P}_i$ donde $\mathcal{P}_i = \{X : X \subseteq I, \#I = i\}$. Sabemos que $\#\mathcal{P}_i = \binom{n}{i}$ y por la regla de la suma resulta $\#\mathcal{P} = \sum_{i=0}^{n} \#\mathcal{P}_i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$, por lo tanto $2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$ como queríamos probar.

(Obs. Otra forma más fácil de probarlo es con la fórmula de potencia de binomio: $2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^i 1^{n-1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$.)

Ejemplo. Probar que $\sum_{i=0}^{n} \binom{a}{i}\binom{b}{n-i} = \binom{a+b}{n}$ para todo $a, b, n \in \mathbb{Z}^+$ (se recuerda que por convención, $\binom{n}{m} = 0$ cuando $m > n$).

Solución. Consideremos dos conjuntos disjuntos A y B con $|A| = a$ y $|B| = b$. Sea $C = A \cup B$, tenemos que $|C| = a+b$. Conocemos una interpretación combinatoria para $\binom{a+b}{n} = |\mathcal{P}|$ donde $\mathcal{P} = \{X : X \subseteq C, |X| = n\}$. Cada $X \in \mathcal{P}$ se descompone de forma única como $X = X_1 \cup X_2$ donde $X_1 \subseteq A$ y $X_2 \subseteq B$. Podemos particionar $\mathcal{P}$ en subconjuntos disjuntos $\mathcal{P} = \cup_{i=0}^{n} \mathcal{P}_i$ donde $\mathcal{P}_i = \{X \in P : |X_1| = i\}$ (algunos podrían ser vacios, como cuando $i > a$). Tenemos que para formar un elemento X de P_i, debemos seleccionar un subconjunto X_1 de A de tamaño i (para lo cual hay $\binom{a}{i}$ posibilidades) y para cualquier elección de X_1, para formar X_2 debemos seleccionar un subconjunto de B de tamaño $n-i$ (para lo cual hay $\binom{b}{n-i}$ posibilidades). Por la regla del producto resulta que $|P_i| = \binom{a}{i}\binom{b}{n-i}$. Luego el resultado se deduce del hecho que $|P| = \sum_{i=0}^{n} |P_i|$.

(Obs. También puede probarse por inducción en $N = a + b$ pero es un poco más dificil. Otra forma más simple de probar esto es por funciones generatrices que veremos más adelante en el curso)

Número de funciones inyectivas y sobreyectivas

Def. Sean A y B dos conjuntos. Llamamos *relación* de A en B a cualquier subconjunto de $A \times B$. Una función de A en B, que se denota por $f : A \to B$, es una relación $f \subseteq A \times B$ que verifica que para cada $a \in A$ existe un único $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$. En ese caso denotaremos $f(a) = b$. Los conjuntos A y B son llamados dominio y codominio de f. El conjunto imagen de f, denotado por $f(A)$ ó $\mathrm{Im}(f)$, está formado por aquellos elementos $b \in B$ tales que $b = f(a)$ para algún elemento $a \in A$.

Def. Una función $f : A \to B$ es inyectiva si $f(a) = f(a')$ implica $a = b$.

A los efectos prácticos resulta útil observar que si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ entonces la condición de inyectividad es equivalente a la condición de que $f(a_i) \in B \setminus \{f(a_j) : j < i\}$ para $i = 2, 3, \ldots, n$.

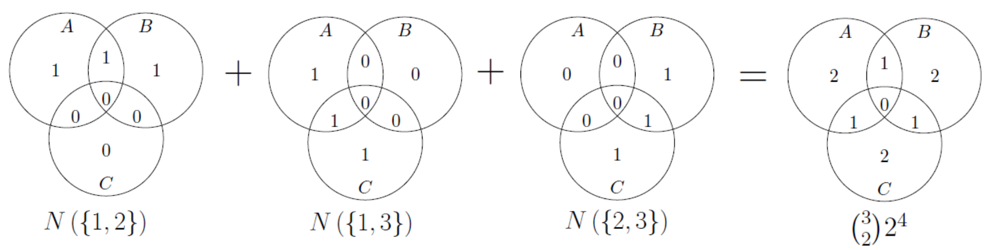
Como aplicación de la regla del producto probamos que el número de funciones $f : A \to B$ donde $|A| = n$, $|B| = m$ viene dado por m^n (si no lo vieron es un buen momento para probarlo!). También vimos[1] que las funciones inyectivas $f : A \to B$ estaban en correspondencia con las permutaciones de largo n tomados de m símbolos posibles $P(m, n)$ (o equivalenemente los arreglos A^m_n de m tomados de a n).

El cálculo de las funciones sobreyectivas es un poco más complicado. Denotamos por $\mathrm{Sob}(n, m)$ el número de funciones sobreyectivas $f : I \to J$

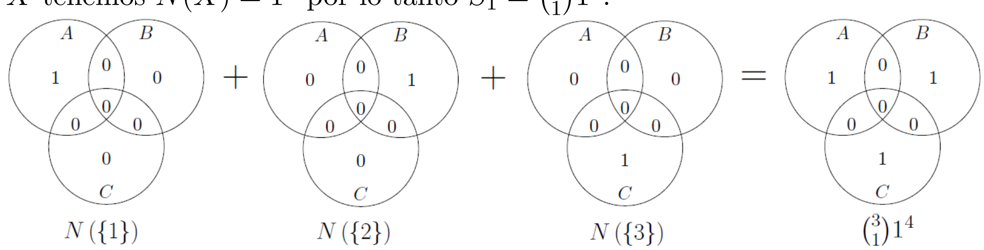
[1] Recordatorio: Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Para determinar una función inyectiva $f : A \to B$ debemos determinar el valor para $f(a_1)$, $f(a_2)$, etc. Para $f(a_1)$ tenemos $m = |B|$ posibilidades, fijado $f(a_1)$ tenemos $m-1$ posibilidades para $f(a_2)$, fijados $f(a_1)$ y $f(a_2)$ tenemos $m-2$ posibilidades para $f(a_3)$ y asi sucesivamente, fijados $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_{n-1})$ tenemos $m-(n-1) = m-n+1$ posibilidades para $f(a_n)$. Por la regla del producto tenemos $m \times (m-1) \times \cdots (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!} = P(m, n)$ funciones inyectivas $f : A \to B$.

donde $|I| = n$ y $|J| = m$. Una fórmula general para $\mathrm{Sob}(n, m)$ será obtenida más adelante cuando veamos el Principo de Inclusión-Exclusión, el cual puede verse como una generalización del método de diagramas de Venn. De hecho cuando $m \leq 3$ se puede obtener una fórmula sencilla usando diagramas de Venn como veremos a continuación para un caso particular.

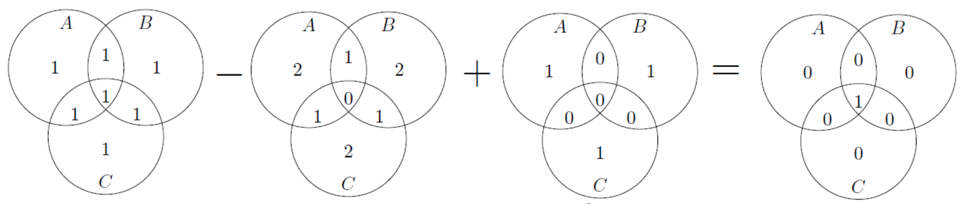
Ejemplo (5.23 Grimaldi). Vamos a calcular $\mathrm{Sob}(4, 3)$ usando diagramas de Venn. Queremos calcular el número de funciones sobreyectivas $f : I \to J$ donde $I = \{w, x, y, z\}$ y $J = \{1, 2, 3\}$. Consideramos entonces el conjunto U de todas las funciones (sobreyectivas o no) $f : I \to J$ y consideramos la descomposición $U = A \cup B \cup C$ donde $A = \{f \in U : 1 \in \mathrm{Im}(f)\}$, $B = \{f \in U : 2 \in \mathrm{Im}(f)\}$ y $C = \{f \in U : 3 \in \mathrm{Im}(f)\}$. Observamos que $f \in U$ es sobreyectiva si y solo si $f \in A \cap B \cap C$, asi que nuestro objetivo es calcular $|A \cap B \cap C| = \mathrm{Sob}(4, 3)$. Para cada subconjunto $X \subseteq J$, denotamos $N(X)$ al conjunto de funciones $f \in U$ tales que $\mathrm{Im}(f) \subseteq X$. Observamos que si $|X| = i$ entonces $N(X) = \{f \in U : \mathrm{Im}(f) \subseteq X\} = \{f : I \to X\} = i^4$. Primero calculemos $S_2 = N(\{1, 2\}) + N(\{1, 3\}) + N(\{2, 3\})$. Hay $\binom{3}{2}$ subconjuntos $X \subseteq J$ con $|X| = 2$, fijado un tal X tenemos $N(X) = 2^4$ por lo tanto $S_2 = \binom{3}{2}2^4$.



Vemos en el diagrama de Venn que S_2 está contando los elementos que se encuentran en exactamente un conjunto 2 veces y los que están en exactamente dos conjuntos 1 vez. Procedemos ahora a calcular $S_1 = N(\{1\}) + N(\{2\}) + N(\{3\})$. Hay $\binom{3}{1}$ subconjuntos $X \subseteq J$ con $|X| = 1$, fijado un tal X tenemos $N(X) = 1^4$ por lo tanto $S_1 = \binom{3}{1}1^4$.



Vemos en el diagrama de Venn que S_1 está contando los elementos que se encuentran en exacamente un conjunto, una única vez cada uno. Por último, el siguiente diagrama nos muestra como podemos obtener $|A \cap B \cap C|$ usando:



3^4 $\quad$ $\binom{3}{2}2^4$ $\quad$ $\binom{3}{1}1^4$ $\quad$ Sob(4,3)

Luego $\mathrm{Sob}(4,3) = 3^4 - \binom{3}{2}2^4 + \binom{3}{1}1^4 = \sum_{i=0}^{2}(-1)^i\binom{3}{3-i}(3-i)^4$.

Usando un razonamiento similar es fácil probar que $\mathrm{Sob}(n,3) = 3^n - \binom{3}{2}2^n + \binom{3}{1}1^n = \sum_{i=0}^{2}(-1)^i\binom{3}{3-i}(3-i)^n$. Para calcular $\mathrm{Sob}(n,m)$ en general, se vuelve extramadamente complicado proceder con diagramas de Venn con $m \geq 4$ conjuntos. Más adelante usando el principio de inclusión-exclusión probaremos que $\mathrm{Sob}(n,m) = \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i\binom{m}{m-i}(m-i)^n$.

Con respecto a su aplicación para ejercicios de conteo, resulta útil observar que $\mathrm{Sob}(n,m)$ es igual a la cantidad de formas de distribuir n pelotitas distintas en m cajas numeradas de forma de que ninguna caja quede vacia.

Relacionado con esto tenemos el siguiente problema: ¿De cuantas maneras puedo distribuir n pelotitas distintas en m cajas idénticas (esto quiere decir que el orden de las cajas es irrelevante) si ninguna caja puede quedar vacia? Denotamos por $S(n,m)$ la cantidad de maneras posibles. Ese número $S(n,m)$ es llamado de *número de Stirling del segundo tipo*. Es fácil ver que por cada distribución de las n pelotitas distintas en las m cajas idénticas sin cajas vacias, tenemos $m!$ posible numeraciones de las cajas, dando lugar a $m!$ funciones sobreyectivas de las pelotitas a las cajas. Por lo tanto $m!S(n,m) = \mathrm{Sob}(n,m)$. Aceptando la fórmula general para $\mathrm{Sob}(n,m)$ que probaremos más adelante tenemos la siguiente expresión para los números de Stirling del segundo tipo:

$$S(n,m) = \frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i\binom{m}{m-i}(m-i)^n.$$

Ej. ¿Cuantas formas hay de factorizar $30030 = a \cdot b$ con $1 < a < b$? (resuelto en Grimaldi, ejemplo 5.28, pág. 265).