Matemática Discreta 1, Curso 2020 - Clase 5 (16/03)

En la última clase teórica del matutino vimos:

- Combinaciones, ejemplos y algunas aplicaciones como: fórmulas de las permutaciones con repetición, potencia de binomio y potencia de multinomio.
- Combinaciones con repetición: comenzamos deduciendo que el número de soluciones naturales de la ecuación

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n \tag{1}$$

viene dado por $\binom{n+m-1}{m-1}$ (pues cada solución corresponde a una permutación de $\underbrace{11\cdots 1}_{n \text{ veces}}\underbrace{++\cdots+}_{m-1 \text{ veces}}$, por ejemplo a $3+0+1=4$ le corresponde $111++1$ mientras que a $0+4+0=4$ le corresponde $+1111+$).

Combinaciones con repetición (continuación):

Consideremos un entero positivo n. Llamamos *composición*[1] *de n de tamaño m* a cualquier secuencia de números m naturales cuya suma da n. La ecuación (1) nos dice que existen exactamente $\binom{n+m-1}{m-1}$ composiciones de n de tamaño m. Por ejemplo para $n=4$ y $m=3$ existen $\binom{6}{2}=15$ composiciones de 4 de tamaño 3:

4+0+0=4	3+1+0=4	3+0+1=4	2+2+0=4	2+1+1=4
2+0+2=4	1+3+0=4	1+2+1=4	1+1+2=4	1+0+3=4
0+4+0=4	0+3+1=4	0+2+2=4	0+1+3=4	0+0+4=4

En esta clase veremos algunos ejemplos donde aplicaremos la fórmula de las composiciones y usaremos esta para resolver el problema de las *Combinaciones con repetición:* Sean $1 \leq m \leq n$. ¿Cuántas formas tenemos de seleccionar m objetos sin importar el orden y permitiendo repeticiones, de entre n objetos distintos?

Ejemplo: Supongamos que tenemos 5 objetos A, B, C, D, E y queremos seleccionar 3 de ellos sin importar el orden:

[1] El nombre completo es "composición débil". Usualmente "composición" se refiere al caso en que todos los sumandos son positivos. En el curso cuando nos referimos a "composiciones" nos estaremos refiriendo a las composiciones débiles por eso omitiremos el adjetivo "débil".

- Sin repeticiones tenemos $\binom{5}{3} = 10$ posibilidades: ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE.
- Con repeticiones: a la lista anterior debemos agregar AAB, ABB, AAC, ACC, AAD, ADD, AAE, AEE, BBC, BCC, BBD, BDD, BBE, BEE, CCD, CDD, CCE, CEE, DDE, DEE, AAA, BBB, CCC, DDD, EEE (25 casos extras). Total $10 + 25 = 35$ casos.

Obs: Al permitir repeticiones tendremos en general mucho más casos.

Ahora lo resolveremos usando la fórmula de las composiciones. Observemos que cada selección es de la forma $\underbrace{A\cdots A}_{x_1 \text{ veces}}\underbrace{B\cdots B}_{x_2 \text{ veces}}\underbrace{C\cdots C}_{x_3 \text{ veces}}\underbrace{D\cdots D}_{x_4 \text{ veces}}\underbrace{E\cdots E}_{x_5 \text{ veces}}$, donde $x_i \geq 0$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \Rightarrow \binom{7}{4} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{3!} = 35$ posibilidades.

En general, supongamos que queremos seleccionar m objetos sin importar el orden y permitiendo repeticiones de entre n objetos distintos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Como el orden no importa, para determinar una selección basta determinar cuantas veces tomamos cada objeto $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Si definimos $x_i =$ cantidad de veces que aparece A_i, tenemos $x_i \geq 0$, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m \Rightarrow$ por la fórmula de las composiciones tenemos $\binom{m+n-1}{n-1}$ posibilidades.

Ejemplo: Se colocan 4 dados idénticos en un vaso, se los entrevera y al colocar el vaso boca abajo se ve el resultado del experimento. ¿Cuántos resultados posibles se tiene para el experimento?

Solución: Lo que nos importa es la cantidad de veces que aparecen cada uno de los números del 1 al 6. Definimos $x_i =$ cantidad de veces que aparece i, $i = 1, 2, \ldots, 6$. Tenemos $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 4$, entonces resultan $\binom{4+5}{5} = \binom{9}{5} = \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{4!} = 7 \cdot 2 \cdot 9 = 126$ posibilidades.

Otras variantes

1. Composiciones con restricciones.

Ejemplo: Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$, con $x_1 \geq 2$ y $x_4 \geq 1$.

Con cambio de variable: Definimos nuevas variables $y_1 = x_1 - 2 \geq 0$, $y_4 = x_4 - 1 \geq 0$, substituyendo tenemos $(y_1 + 2) + x_2 + x_3 + (y_4 + 1) = 6$.

O sea, debemos resolver $y_1 + x_2 + x_3 + y_4 = 3$ sin restricciones $\Rightarrow \binom{3+3}{3} = \binom{6}{3} = \frac{4\cdot5\cdot6}{3!} = 20$ soluciones.

Otra forma: El problema es equivalente a distribuir 6 pelotitas idénticas en 4 cajas numeradas (donde los x_i = cant. de objetos en la i-ésima caja) tales que en la primer caja debe haber al menos 2 pelotitas y en la cuarta al menos una. Podemos colocar de entrada 2 pelotitas en la primer caja y 1 en la cuarta, reduciendo el problema a distribuir 3 pelotitas idénticas en 4 cajas numeradas sin restricción: $x_1+x_2+x_3+x_4 = 3 \Rightarrow \binom{6}{3} = 20$ soluciones.

Ejemplo: ¿Cuántas listas binarias de largo 8 con exactamente 3 unos verifican que no tienen dos unos consecutivos?

Solución: Una tal lista es de la forma $\underbrace{0\cdots0}_{x_1 \text{ ceros}}\,1\,\underbrace{0\cdots0}_{x_2 \text{ ceros}}\,1\,\underbrace{0\cdots0}_{x_3 \text{ ceros}}\,1\,\underbrace{0\cdots0}_{x_4 \text{ ceros}}$ donde los x_i son naturales satisfaciendo: $x_1+x_2+x_3+x_4 = 5$, $x_2 \geq 1, x_3 \geq 1$. Usando cualquiera de los métodos de mencionados arriba, esta ecuación se reduce a $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$ sin restricciones. Luego por la fórmula de las composiciones tenemos $\binom{6}{3} = \frac{4\cdot5\cdot6}{3!} = 20$ listas binarias posibles.

2. Composiciones con desigualdades.

Ejemplo: Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 6$.

Agregando nueva variable: Definimos una nueva variable $x_5 = 6 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \geq 0$. Ahora debemos resolver la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6$ sin restricciones. El total de soluciones es $\binom{10}{4} = 210$.

Otra forma: El problema es equivalente a distribuir a lo máximo 6 pelotitas idénticas en 4 cajas numeradas (donde los x_i = cant. de objetos en la i-ésima caja). En este caso, me pueden sobrar pelotitas. Entonces colocamos una quinta caja para las pelotitas sobrantes y llamamos x_5 a las pelotitas que irian en esa caja. El problema se redujo a distribuir 6 pelotitas idénticas en 5 cajas numeradas sin ninguna restricción: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 6 \Rightarrow \binom{10}{4} = 210$ soluciones.

Ejemplo: Calcule el número de funciones crecientes[2] $f : \{0,2,4\} \to \{0,1,2,3,4,5\}$.

Solución: Todas esas funciones verifican $f(0) \leq f(2) \leq f(4)$, por lo tanto existen números naturales x_1, x_2, x_3 tales que $f(0) = x_1$, $f(2) = x_1 + x_2$ y $f(4) = x_1 + x_2 + x_3$. Como $f(4) \leq 5$ entonces debemos resolver en los naturales la inecuación $x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$. Como vimos arriba esta inecuación se reduce a la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$ sin restricción, que tiene $\binom{8}{3} = 56$ soluciones.

Obs. Pueden haber ocasiones en donde tengamos que resolver en los naturales una desigualdad $x_1 + x_2 + \cdots + x_m \leq n$ con ciertas restricciones del tipo $x_i \geq c_i$ (para ciertas constantes c_i determinadas por la letra del problema). En ese caso podemos combinar ambas estrategias. Primero haciendo un cambio de variable $y_i = x_i - c_i$ reducimos el problema a una desigualdad sin restricciones, el cual podemos resolver utilizando el método de introducir una nueva variable.

[2] Creciente en sentido amplio, o sea tal que si $i \leq j$ entonces $f(i) \leq f(j)$.