Número de Parcial	Cédula	Primer Apellido

Matemática Discreta 1

Segundo Parcial

Martes 26 de junio de 2018

Cada ejercicio múltiple opción vale cinco puntos y no se restan puntos.
No está permitido usar calculadora ni "material".

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5	MO6
E	D	A	B	B	A

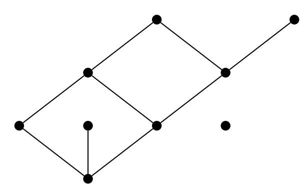
Ejercicios de Múltiple Opción

MO1: La cantidad de relaciones de equivalencias definibles sobre el conjunto $\{A, E, I, O, U\}$ de vocales tales que la clase de la A tenga tres o más elementos es:

A) 12 **B)** 14 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 17.

Resolución: Si $[A]$ tiene tres elementos los otros dos elementos los elegimos de $\binom{4}{2} = 6$ maneras distintas y luego tenemos dos posibilidades según los otros elementos forman una o dos clases. Si $[A]$ tiene cuatro elementos los otros tres elementos los elegimos de $\binom{4}{3} = 4$ maneras distintas. Si $[A]$ tiene cinco elementos los otros cuatro elementos los elegimos de $\binom{4}{4} = 1$ maneras distintas. En total serán $6 \cdot 2 + 4 + 1 = 17$ relaciones.

MO2: Considere la relación de orden definida por el diagrama de Hasse de la figura.



La cantidad de elementos maximales de R es:

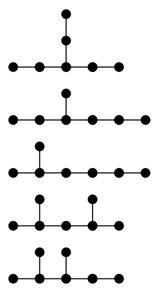
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5.

Resolución: Son cuatro, de los nueve hay cinco que están relacionados con otro. Los otro cuatro son maximales.

MO3: La cantidad de árboles no isomorfos con siete vértices y grado máximo tres es:

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9.

Resolución: Como el grafo tiene grado máximo tres, dividimos el conjunto según la cantidad de vértices de grado tres. Si tiene un solo vértice de grado tres, de él colgarán tres caminos de diferente largo que podrán ser: 1) largos 2,2,2, largos, 1,2,3 y largos 1,1,4. (Ver primeros tres grafos de la figura) Si tiene dos vertices de grado tres, distinguimos según el largo del camino entre ambos (distancia). O bien están a distancia uno (último de los grafos) o distancia dos (penúltimo grafo de la figura). Claramente no pueden haber más de dos vértices grado tres. En total son cinco grafos no isomorfos.



MO4: Sea el grafo $G = (V, E)$ con

$$V = \{1, 2, 2', 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$E = \{12, 12', 23, 2'3, 34, 45, 56, 67, 78, 89\}.$$

La cantidad de subgrafos de G homeomorfos a K_2 es:

A) 68 B) 69 C) 70 D) 71 E) 72.

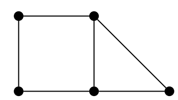
Resolución: Un subgrafo es homoemorfo a K_2 sii es un camino simple con dos o más vértices. Dividimos V en dos conjuntos $V_1 = \{1, 2, 2'\}$ y $V_2 = \{3, 4, \ldots, 9\}$, y distinguimos tres casos: 1) subgrafos con extremos en V_2, que son $\binom{|V_2|}{2} = 21$, 2) subgrafos con un extremo en V_1 y el otro en V_2 que son $|V_1||V_2| \times 2 = 42$, 3) subgrafos con extremos en V_1, que son $\binom{|V_1|}{2} \times 2 = 6$. En total son $21 + 42 + 6 = 69$

MO5: La cantidad de relaciones de orden que se pueden definir sobre un conjunto con tres elementos es:

A) 18 B) 19 C) 20 D) 21 E) 22.

Resolución: Sus diagramas de Hasse pueden consistir en 1) tres puntos aislados, 2) un punto aislado y un segmento vertical, 3) dos segmentos con la forma $\vee$, 4) dos segmentos con la forma $\wedge$ o 5) dos segmentos formando un camino vertical. Hay 1 posibilidad en el caso 1), $3 \times 2 = 6$ posibilidades para el caso 2), tres posibilidades para los casos 3) y 4) y $3! = 6$ posibilidades para el caso 5. Total $1+6+6+6 = 19$.

MO6: Sea el grafo de la figura:



La cantidad de formas de colorearlo con tres colores es:

A) 18 B) 19 C) 20 D) 21 E) 22.

Resolución: Calculamos el polinomios cromático usando la fórmula de la intersección de dos grafos en un completo: $P(G; 3) = P(C_4; 3)P(K_3; 3)/P(K_2; 3) = 3(3 - 1)(3^2 - 3 \cdot 3 + 3)3 \cdot 2 \cdot 1/3 \cdot 2 = 18$. Pues $P(C_3; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 3)$ (visto en el teórico).

Ejercicios de Desarrollo

Cada parte de cada ejercicio vale cinco puntos.

Ejercicio de Desarrollo 1:

Sea el grafo $G = (V, E)$ con

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, o, p, r, s, t, u, v, x, y, z\},$$

y

$$E = \{ab, bc, cd, de, ef, fa, ag, gh, hi, ij, ja, ck, kl, lm, mo, op, pc, mr, rs, st, tu, uv, vm, tx, xy, ya, az, zt\}.$$

a) Demostrar que existe un circuito euleriano

b) Hallar explícitamente un circuito euleriano.

Resolución: a) Basta ver el grado de cada vértice es par y el grafo es conexo. Para lo primero basta calcular la cantidad de aristas de cada vértice: $a/6, b/2, c/4, d/2, e/2, f/2, g/2, h/2, i/2, j/2, k/2, l/2, m/4, o/2, p/2, r/2, s/2, t/4, u/2, v/2, x/2, y/2, z/2$, Para ver que es conexo, basta encontrar un árbol recubridor, para ello damos sus 22 aristas:

$$ab, bc, cd, de, ef$$

$$ag, gh, hi, ij,$$

$$ck, kl, lm, mo, op,$$

$$mr, rs, st, tu, uv,$$

$$tx, xy, az$$

b) Un circuito euleriano es $a, b, c, k, l, m, r, s, t, x, y, a, z, t, u, v, m, o, p, c, d, e, f, a, g, h, i, j, a$. Está claro que al dar el circuito no es necesario hacer la parte a)

Ejercicio de Desarrollo 2:

a) Demostrar que en todo grafo $G = (V, E)$ conexo plano bipartito con más de dos aristas, debe verificar que

$$|E| \leq 2|V| - 4.$$

b) Encontrar un grafo bipartito no plano que verifique la desigualdad anterior, explicando porqué no es plano.

Resolución: a) Como el grafo es simple y bipartito no tiene ciclos de longitud 3. Como además tiene dos o más aristas, el grado de sus caras es mayor que 3, o sea mayor o igual a 4, de donde

$$2|E| = \sum_{c \in \text{Caras}} gr(c) \geq \sum_{c \in \text{Caras}} 4 = 4|\text{Caras}|$$

Por Euler sabemos que

$$|V| - |E| + |\text{Caras}| = 2$$

de donde

$$2|E| \geq 4(2 - |V| + |E|)$$

o sea $-8 + 4|V| \geq 2|E|$ dividiendo por 2 obtenemos la desigualdad deseada.

b) Sea G igual a $K_{3,3}$ con un vértices colgante. La misma tendrá 10 aristas y 7 vértices. Como

$$10 \leq 2 \cdot 7 - 4 = 10.$$

el grafo verifica la desigualdad sin embargo no es plano al ser el mismo un subgrafo homoemorfo a $K_{3,3}$, así que por Kuratowski no es plano.

Ejercicio de Desarrollo 3:

a) Demostrar que todo grafo simple conexo plano posee un vértice de grado menor o igual a cinco.

b) Demostrar que todo grafo simple conexo plano se puede colorear con seis colores (*Sugerencia:* usar inducción en el número de vértices).

Resolución: a) por absurdo, si todo vértice tuviera grado mayor a 5, todo vértice tendría grado mayor o igual a 6, de donde, si el grafo es $G = (V, E)$

$$2|E| = \sum_{v \in V} gr(v) \geq \sum_{v \in V} 6 = 6|V|.$$

Si el grafo tiene una o cero aristas, es trivial. Si tienen más, entonces $|E| \leq 3|V| - 6 \leq |E| - 6$ absurdo.

b) Para un vértice es trivial. Supongamos válido para n vértices. Si tenemos un grafo simple plano G con $n + 1$ vértices, tendrá un vértice v con $gr(v) \leq 5$. Consideremos $G' = G - v$: es plano y tiene n vértices, por lo tanto será coloreable con seis colores por la hipótesis inductiva. Como v es adyacente a cinco vértices solamente, existirá un color de los seis disponibles para colorearlo. De donde la coloración de G' se puede extender a G.