Primer Parcial - Matemática Discreta I

Lunes 26 de junio de 2017

Número de lista	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5
C	B	B	D	B

Cada Problema de Desarrollo correcto vale 10 puntos. Usar la parte de atrás de esta hoja.
Cada respuesta correcta de Múltiple Opción suma 8 puntos. Respuestas incorrectas restan 2.
Rellenar claramente en los casilleros superiores.
La duración del parcial es de tres horas.

Problema de Desarrollo 1

Probar que todo grafo acíclico es plano.

Solución - Problema de Desarrollo 1

Supongamos por absurdo que G es acíclico pero no es plano. Por el Teorema de Kuratowski, G tiene algún subgrafo que es homeomorfo a $K_{3,3}$ o a K_5. Pero tanto $K_{3,3}$ como K_5 tienen ciclos, y ningún subgrafo de G tiene ciclos. Puesto que el número de ciclos es invariante bajo homeomorfismo, tenemos una contradicción. Luego todo grafo acíclico es plano.

Problema de Desarrollo 2

Probar que la cantidad de vértices de grado impar es par en todo grafo simple no dirigido.

Solución - Problema de Desarrollo 2

Cada arista aporta dos unidades a la suma de grados. Luego vale la siguiente fórmula de suma de los grados de los vértices en todo grafo simple $G = (V, E)$:

$$\sum_{v_i \in V} gr(v_i) = 2|E|.$$

Puesto que el segundo miembro es par, y los sumandos del primer miembro son naturales, la cantidad de sumandos impares del primer miembro debe ser par. Entonces, la cantidad de vértices de G de grado impar debe ser par.

Múltiple Opción 1

Sean x e y dos vértices adyacentes de C_{20}.
¿Cuántos caminos de largo 11 empiezan en x y terminan en y? A) $\binom{11}{2}$; B) $\binom{11}{4}$; C) $\binom{11}{6}$; D) $\binom{11}{8}$.

Solución - MO1

Si moverse en el sentido del movimiento x-y lo denotamos por "1" y moverse en el sentido opuesto por "0", podemos modelar el problema como encontrar todas las palabras binarias de largo 11 con 6 "1" y 5 "0", por lo que la opción correcta es la C.

Múltiple Opción 2
Sea G un grafo acíclico con 10 vértices, 3 componentes conexas y grado máximo igual a 2.
El polinomio cromático de G evaluado en 2 vale: A) 6; B) 8; C) 10; D) Faltan datos.

Solución - MO2
Al ser G un grafo acíclico, cada componente conexa será un árbol, así que tendremos un total de 3 árboles. Luego el polinomio cromático de cada árbol con n_i nodos es $\lambda(\lambda-1)^{n_i-1}$, y el polinomio cromático de G es $\prod_{i=1}^{i=3} \lambda(\lambda-1)^{n_i-1}$. Si evaluamos con $\lambda = 2$ obtenemos que el resultado es 8, por lo que la respuesta correcta es B.

Múltiple Opción 3
Tres hombres y dos mujeres llevan tres carpas distintas para acampar (una roja, una blanca, una azul). Contar la cantidad de distribuciones posibles asumiendo que los hombres y las mujeres deben ir en carpas distintas, y que todos deben tener una carpa asignada.
A) 20; B) 30; C) 40; D) 50.

Solución - MO3
Hombres y mujeres no pueden estar juntos, así que modelando el problema como un grafo bipartito $K_{2,3}$ (dos mujeres y tres hombres) hallar su polinomio cromático y evaluarlo en $\lambda = 3$ es equivalente a asignar a las carpas las personas, respetando la condición de que hombres y mujeres no pueden estar juntos. Aplicando el teorema de descomposición del polinomio cromático, y eligiendo $e = (m_1, m_2)$, donde m_1 y m_2 representan a las dos mujeres, tenemos que $P(\lambda, K_{2,3}) = P(\lambda, K_{2,3}e^+) + P(\lambda, K_{2,3}e') = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^3 + \lambda(\lambda-1)^3$. Evaluando en $\lambda = 3$ obtenemos $3 \times 2 + 3 \times 8 = 30$, por lo que la respuesta correcta es la B.

Múltiple Opción 4
Sea G un grafo bipartito completo con 15 aristas. Entonces:
A) G es plano y Hamiltoniano; B) G es plano y no es Hamiltoniano;
C) G no es plano y es Hamiltoniano; D) G no es plano ni Hamiltoniano.
Sugerencia: notar que existe un único grafo bipartito completo con 15 aristas en total.

Solución - MO4
Notemos que la única forma de formar 15 como producto de dos naturales es $15 = 3 \times 5$. Luego, existe un único grafo bipartito completo con 15 aristas: $K_{3,5}$. Este este grafo contiene un subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$, por lo que usando el Teorema de Kuratowski no es plano. Tampoco posee ciclo hamiltoniano, dado que al ser bipartito con cantidad distinta de nodos en cada conjunto de vértices. Por lo tanto, la respuesta correcta es la D.

Múltiple Opción 5
Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia sobre $\{0, 1, \ldots, 7\}$ tales que $\#[0] = 2$ y $\#[1] = 4$.
A) 60; B) 120; C) 180; D) 240.

Solución - MO5
Las clases de equivalencia asociadas a 0 y 1 tienen que ser distintas, pues no poseen la misma cantidad de elementos. Hay $\binom{6}{1}$ formas de elegir quien acompaña al 0 ya que tenemos 8 elementos en nuestro conjunto y debemos quitar al 0 y al 1, $\binom{5}{3}$ formas de elegir quien acompaña al 1, y por último podemos formar una clase de equivalencia sola con los dos elementos que sobran, o ponerlos en distintas clases de equivalencia. Por lo tanto hay un total de $\binom{6}{1} \times \binom{5}{3} \times (1+1) = 120$. La respuesta correcta es las B.