Solución - Segundo Parcial MD1

Jueves 9 de julio de 2015

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5	MO6
A	D	B	A	B	D

Múltiple Opción 1

El grafo con grados de sus vértices $(4,3,3,3,3)$ es un ciclo de 4 vértices, y ellos unidos a otro vértice (o grafo rueda), que tiene $t = 4$ triángulos. Luego, la opción correcta es la A.

Múltiple Opción 2

La divisibilidad en $A = \{x \in \mathbb{Z}^+ : 2 \leq x \leq 20\}$ admite a la anticadena $|A|' = \{x \in A : x > 10\}$ de cardinal máximo $\alpha = A' = 10$. Luego, la opción correcta es la D.

Múltiple Opción 3

Sea $G = (V,E)$ simple y 6–regular con 8 vértices. Por Handshaking tenemos que $6|V| = 2|E|$. Es claro que G es conexo. Supongamos por absurdo que G es plano. Luego, por la fórmula de Euler tendríamos que $|V| - |E| + r = 2$, y utilizando que $|E| = 3|V|$ tendríamos que $r = 2+2|V|$, más que la cantidad de nodos, lo que es imposible. Luego G no es plano. Veamos ahora que G no tiene subgrafo homeomorfo a K_5. Los grafos homeomorfos a K_5 son precisamente K_5 con subdisiviones elementales (vértices de grado 2). Como G no tiene vértices de grado 2, basta con ver que G no contiene a K_5. En efecto, si hay 5 vértices unidos entre sí en G, sean a, b y c los restantes vértices. Para lograr la 6 regularidad, cada uno de los 5 vértices debe unirse exactamente a 2 vértices de $\{a,b,c\}$. De K_5 saldrían entonces $5 \times 2 = 10$ aristas. Sin embargo, los nodos a, b y c deben tener grado 6, y reciben solamente 10 aristas desde los vértices de K_5. Esto es imposible. Luego, por el Teorema de Kuratowski, G admite un subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$, y la opción correcta es la B.

Múltiple Opción 4

Hay $\binom{9}{5} = 126$ maneras de elegir la clase $[1]$ (eligiendo 5 elementos distintos de 1), y $p_4 = 1+1+6+3+4 = 15$ particiones de tamaño 4. Luego, la cantidad de relaciones es $126 \times 15 = 1890$, y la opción correcta es la A.

Múltiple Opción 5

Como el grado máximo del grafo $G = (V,E)$ es 2, G consiste en unión disjunta de ciclos y caminos elementales. Sea h la cantidad de vértices colgantes. Por Handshaking tenemos que $2|E| = h + 2(|V| - h) = 2|V| - h$, y reescribiendo tenemos que $|V| - |E| = h/2$. Por otra parte, la fórmula de Euler nos asegura que $|V| - |E| + r = k(G) + 1$, o $r - 1 = k(G) - h/2$. Se observa que $r - 1$ es precisamente la cantidad de ciclos de G, que sustituyendo con los datos del problema vale $r - 1 = k(G) - h/2 = 6 - 6/2 = 3$. Luego, la opción correcta es la B.

Múltiple Opción 6

Llamemos respectivamente a_n, b_n y c_n a la cantidad de caminos de largo n que empiezan en a terminan en a, b o c. Se desea hallar b_{11}. Por regla de la suma: $a_n + b_n + c_n = 2^n$. Además, $b_{n+1} = a_n + c_n$. Sustituyendo tenemos que $b_{n+1} + b_n = 2^n$, que al resolver con el dato inicial $b_1 = 1$ se obtiene $b_n = ((-1)^{n+1} + 2^n)/3$. Luego $b_{11} = (1 + 2^{11})/3 = 2049/3 = 683$, y la opción correcta es la D.

Problema 1

Representemos la relación de conocidos mediante un grafo $G = (V, E)$, donde la arista $e = (v, w)$ significa que las personas v y w se conocen. Debemos probar que existe un triángulo en G o en el grafo complemento $\overline{G}$. Se observa que el grado de un vértice cualquiera en G, más el grado del mismo vértice en el complemento, siempre vale 5. Luego, existe un vértice v que tiene grado 3 o más en G o en su complemento $\overline{G}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $gr(v) \geq 3$ en G (el mismo razonamiento aplica si $gr(v) \geq 3$ en el grafo complemento). Sean w_1, w_2 y w_3 vértices adyacentes a v en G. Hay dos posibilidades:

- Existe alguna arista (w_i, w_j) en E, en cuyo caso las tres aristas $\{(v, w_i), (w_i, w_j), (w_j, v)\}$ forman un triángulo en G, o
- No hay aristas de la forma $\{(w_i, w_j)\}$ en E, en cuyo caso las tres aristas $\{(w_1, w_2), (w_2, w_3), (w_3, w_1)\}$ forman un triángulo en $\overline{G}$.

Hemos probado que existe un triángulo en G o en $\overline{G}$. Luego, hay tres personas que se conocen entre sí, o tres personas que no se conocen entre sí, como se desea. Se observa que pueden ocurrir ambas condiciones simultáneamente. De hecho, basta con tomar tres personas que se conocen entre sí, y las otras tres personas que no se conocen entre ellas.

Problema 2

Sea $G = (V, E)$ un grafo acíclico. Si es conexo, tenemos un árbol, en cuyo caso se verifica la igualdad $|E| = |V| - 1$. En caso contrario, sea $k = k(G) > 1$ la cantidad de componentes conexas de G. Tomemos un vértice cualquiera v_1, y elijamos arbitrariamente un vértice de cada una de las demás componentes: $v_2, \ldots, v_k$. Luego de agregar las $k - 1$ aristas (v_1, v_i), $i = 2, \ldots, k$, tenemos un grafo conexo, pues todos los vértices están unidos a v_1. Además no hemos generado ciclos, por lo que el grafo obtenido, T, es un árbol. Tenemos así que T tiene la misma cantidad de vértices que G, pero $k - 1$ aristas más. Entonces: $|E| + k - 1 = |V| - 1$, y despejando tenemos que $|E| = |V| - k \leq |V| - 1$.

Se observa que la igualdad ocurre únicamente cuando $k = 1$, es decir, cuando G es un árbol. En otro caso, G es un bosque, y se verifica la desigualdad estrictamente.