Matemática Discreta I

Segundo Parcial del curso 2005

Lunes 5 de diciembre de 2005

N. de parcial	Apellido	Nombre	Cédula de Identidad

RESPUESTAS (llenar)								No llenar	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	C	D	B	E	C	B	B		

MINI ENCUESTA
1) ¿Desea que su resultado sea publicado en la web? (SI o NO):
2) ¿A que teórico concurrió?
(M=matutino, V = vespertino, N = nocturno)
a) durante la primera mitad del curso:
b) durante la segunda mitad del curso:

ACLARACIÓN
No hay puntos negativos y cada respuesta correcta vale 6 puntos. No se puede usar material. Toda la información extra sobre el parcial será publicada en la web[1].

EJERCICIO 1 Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y sea $\mathcal{R}$ el conjunto de relaciones antisimétrica sobre A. Calcular el máximo cardinal m de una relación en $\mathcal{R}$ y la cantidad n de relaciones con dicho cardinal, esto es

$$m = \max_{R\in\mathcal{R}} |R|$$

$$n = |\{R \in \mathcal{R} : |R| = m\}|$$

Opciones:
A) $m = 15, \quad n = 2^{15}$.
B) $m = 15, \quad n = 3^{15}$.
C) $m = 21, \quad n = 2^{15}$.
D) $m = 21, \quad n = 2^{21}$.
E) $m = 21, \quad n = 3^{21}$.

EJERCICIO 2 En Z^+ sea la relación de equivalencia $a\mathcal{R}b$ si $m.c.m.(a, 16) = m.c.m.(b, 16)$, donde $m.c.m.$ indica el mínimo común múltiplo. ¿Cuántos elementos tiene la clase de equivalencia del entero 6?
Opciones: A) $|[6]| = 1$; B) $|[6]| = 4$; C) $|[6]| = 5$; D) $|[6]| = 12$; E) $|[6]| = 48$.

EJERCICIO 3 La cantidad de caminos de longitud 99 que existen entre dos vértices adyacentes dados de C_3 es:
Opciones: A) 2^{98}; B) 2×3^{97}; C) $(2^{99} - 1)/3$; D) $(2^{99} + 1)/3$; E) $3 \times (2^{99} + 1)$.

EJERCICIO 4 ¿Cuántos subgrafos inducidos de K_5, no isomorfos entre sí, existen?
Opciones: A) 1; B) 5; C) 12; D) 60; E) 120.

EJERCICIO 5 Dados dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ definimos el grafo producto como $G_1 \times G_2$ como aquel cuyo con-

[1] *http://www.fing.edu.uy/ webimerl/discreta1/principal.htm*

junto de vértices es $V_1 \times V_2$ y tal que dos pares (a,b) y (a',b') son adyacentes si a es adyacente a a' en G_1 y b es adyacente a b' en G_2. Opciones:
A) $K_2 \times C_3$ no posee un circuito euleriano.
B) El grado de un vértice (a,b) en G es la suma de los grado de a y b en G_1 y G_2 respectivamente.
C) Si G posee un circuito euleriano entonces G_1 y G_2 también.
D) $C_4 \times C_4$ posee un circuito euleriano.
E) $C_4 \times C_3$ posee un circuito euleriano.

EJERCICIO 6 Sea G un grafo conexo que posee una inmersión plana en la que todas sus caras tienen grado 3. Opciones:
A) G puede tener 2005 aristas.
B) Necesariamente G posee más aristas que vértices.
C) Si $n > 2$ existe un tal G con n vértices.
D) Si G posee 15 aristas entonces tiene 8 vértices.
E) Si G posee 15 aristas entonces su inmersión determina 11 caras.

EJERCICIO 7 ¿Cuántos subgrafos homeomorfos a P_2 posee C_{10}? Opciones: A) 10; B) 90; C) 91; D) 180; E) 1024.

EJERCICIO 8 En un criadero de peces se tienen 6 especies numeradas del 1 al 6. Algunas especies son depredadoras de otras, según la siguiente tabla:

especie	depreda a
1	2,3,6
2	4,5,6
3	4
4	–
5	6
6	–

¿Cuántos estanques χ se necesitan como mínimo para criar las 6 especies de forma que una especie que depreda a otra no quede en el mismo estanque que esta? ¿De cuántas maneras m se pueden colocar las especies en los estanques si se usan $\lambda \geq \chi$ estanques distinguibles entre sí? Opciones:
A) $\chi = 3$, $m = \lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda^2-3\lambda+3)$.
B) $\chi = 3$, $m = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda^2-3\lambda+3)$.
C) $\chi = 2$, $m = \lambda(\lambda-1)^3(\lambda^2-3\lambda+3)$.
D) $\chi = 4$, $m = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)^2$.
E) $\chi = 4$, $m = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda^2-3\lambda+3)$.

EJERCICIOS DE DESARROLLO

EJERCICIO 9 Sean $(A,\mathcal{R}_1)$ y $(B,\mathcal{R}_2)$ dos conjuntos parcialmente ordenados. En $A \times B$ se define la relación $\mathcal{R}$ como sigue:

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \quad \Leftrightarrow \quad a\mathcal{R}_1 c \text{ y } b\mathcal{R}_2 d$$

a) Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de orden.

b) Dibujar el diagrama de Hasse de $\mathcal{R}$ siendo:

$$\begin{aligned} A &= \{1,2,3\}, \\ \mathcal{R}_1 &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,3)\} \\ B &= \{0,1\}, \\ \mathcal{R}_2 &= \{(0,0),(0,1),(1,1)\} \end{aligned}$$

EJERCICIO 10 Enumere todos los árboles no isomorfos con 10 vértices tales que poseen exactamente un vértice de grado 5 y los demás de grado 1 o 2.