Sábado 8 de marzo del 2003

HOJA PARA EL ESTUDIANTE

Matemática Discreta I
Segundo Examen-Parcial
(curso 2002)

RESPUESTAS (versión 1)									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

- Esta hoja es para que el estudiante anote sus respuestas y pueda compararlas con las respuestas correctas que serán publicadas en cartelera. Además contiene la siguiente información sobre el examen: puntaje de las preguntas, fecha de publicación de la letra, de las respuestas y de los resultados.
- Antes que nada complete con todos sus datos personales la hoja de scanner y la de problemas.
- Cuando llene los óvalos de la hoja de scanner con el número de examen recuerde marcar los ceros a la izquierda.
- La prueba dura **4 horas** y es **"sin material".** Es decir, no se permite el uso de calculadoras, ni la consulta de libros o apuntes.
- El examen consta de 10 ejercicios múltiple opción. Cada respuesta correcta vale 10 puntos, incorrecta -1 puntos y sin responder o con respuesta confusa 0 punto.
- Para aprobar el examen se deben obtener 60 puntos o más.
- Para los que hayan hecho el curso a distancia del año 2001, se les recuerda que ya no tienen examen diferenciado (esta aclaración fue hecha en la página web de dicho curso con mucha antelación).

¡¡BUENA SUERTE!!

Información Útil Para Luego Del Parcial

- Recuerde que aunque usted haya terminado el examen pueden haber otros que no: evite hacer ruidos innecesarios, etc.
- La letra y las respuestas del examen se publicarán el mismo día (sábado 8 de febrero) a las 20:00 en la cartelera del IMERL y en la página web de la materia (http://www.fing.edu.uy/ webimerl/discreta1/principal.htm).
- Los resultados del examen se publicarán a más tardar el día martes 18 de marzo a la hora 15:00. Los reclamos deberán realizarse entre los días 18 y 19 de marzo hasta las 15:00 horas depositando en la urna de Matemática Discreta I, que se encontrará en la entrada del IMERL, una hoja con su nombre y apellido, número de cédula de identidad y, en forma breve, qué es lo que reclama. Se darán respuesta a esos reclamos en la medida de lo posible el día jueves 20 de marzo a las 15:00 horas.

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

LETRA DE LOS EJERCICIOS.

EJERCICIO 1

Considere el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ y las funciones $f : A \times A \longrightarrow A$ que verifican

$$f(i,1) \neq f(i,2) \neq f(i,3) \qquad \forall i \in A.$$

¿Cuántas de dichas funciones hay?

Aclaración: $f(i,1)$ puede eventualmente ser igual a $f(i,3)$.

Indique la opción correcta:

(A) 36.

(B) 3^6.

(C) 12^3.

(D) 6^3.

(E) 18.

SOLUCIÓN: **Es la (C).** Efectivamente para $f(1,1)$ hay 3 posibilidades, luego para $f(1,2)$ hay solo 2 y para $f(1,3)$ nuevamente hay 2, en total 12. Como para las otras filas vale el mismo razonamiento y son independientes entre sí, por la regla del producto serán 12^3 formas.

EJERCICIO 2

Calcular el coeficiente en x^2y^2 del polinomio

$$(1 + \frac{x+y}{\sqrt{2}} + 5xy)^8.$$

Indique la opción correcta:

(A) 1645.

(B) 945.

(C) 1960.

(D) 1345.

(E) 2660.

SOLUCIÓN: **es la (A).** Efectivamente hay tres formas de obtener x^2y^2 en el producto anterior:

I) eligiendo dos factores con $5xy$ y el resto con 1;

II) eligiendo un factor con $5xy$, otro con $x/\sqrt{2}$, otro con $y/\sqrt{2}$ y el resto con 1 o

II) eligiendo dos factores con $x/\sqrt{2}$, dos con $y/\sqrt{2}$ y el resto con 1.

Para I) hay $\binom{8}{2}$ formas de hacerlo, para II) hay A_3^8 (arreglos de 8 en 3) y para III) hay $A_4^8/(2!2!)$. Sumando obtenemos:

$$4.7.5^2 + 8.7.6.5.\frac{1}{2} + 2.7.6.5.\frac{1}{4} = 700 + 840 + 105 = 1645.$$

EJERCICIO 3 Sea A un conjunto con 3 elementos. Determinar la cantidad n_O de todas las relaciones de orden (parcial) existentes sobre A. Determinar la cantidad n_R de todas las relaciones de orden existentes sobre A que son a su vez retículos.

Sugerencia: Considere los diagramas de Hasse correspondientes.

Indique la opción correcta:

(A) $n_O = 19$, $n_R = 6$.

(B) $n_O = 30$, $n_R = 6$.

(C) $n_O = 30$, $n_R = 1$.

(D) $n_O = 12$, $n_R = 6$.

(E) $n_O = 18$, $n_R = 12$.

SOLUCIÓN: **Es la opción (A).** Dibujando los diagramas de Hasse se obtienen 5 diagramas diferentes: uno sin elementos relacionados, otro con solo dos elementos relacionados, uno con un máximo y dos elementos minimales, otro con un mínimo y dos elementos maximales y por último el orden total. Para el primero hay una sola posibilidad. Para el segundo hay $3 \times 2 = 6$ posibilidades 3 para elegir el elemento aislado y 2 para elegir los otros. Del tercero y cuarto se pueden obtener 3 órdenes diferentes para cada uno según que elemento se elija como mínimo y máximo respectivamente. Para el orden total hay $3!$ posibilidades. En total son 1+6+3+3+6 = 19 órdenes posibles. Loas únicos retículos son los órdenes totales que son 6.

EJERCICIO 4

Considere la función $f(x) = xe^{2x}$. Exprese su derivada $n-$ésima como

$$f^{(n)}(x) = (a_n + b_n x)e^{2x}$$

donde a_n y b_n son números enteros que dependen de n para todo $n \geq 0$. Hallar la derivada centésima de f evaluada en 1.

Sugerencia: Hallar y resolver las relaciones de recurrencia para a_n y b_n, con condiciones iniciales.

Indique la opción correcta:

(A) $f^{(100)}(1) = (2^{99} + 200).e^2$.

(B) $f^{(100)}(1) = 2^{100}.102.e^2$.

(C) $f^{(100)}(1) = (2^{100} + 200).e^2$.

(D) $f^{(100)}(1) = 2^{100}.51.e^2$.

(E) $f^{(100)}(1) = (2^{99} + 100).e^2$.

SOLUCIÓN: **Es la opción (D).** Para hallar las condiciones iniciales planteamos la ecuación $f(x) = f^{(0)}(x)$:

$$xe^{2x} == (a_0 + b_0 x)e^{2x}.$$

De lo cual obtenemos $a_0 = 0$ y $b_0 = 1$. Para hallar la relaciones de recurrencia planteamos la ecuación $f^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x)'$:

$$(a_{n+1} + b_{n+1}x)e^{2x} = \left((a_n + b_n x)e^{2x}\right)' = b_n e^{2x} + (a_n + b_n x)e^{2x}2 = (2a_n + b_n + 2b_n x)e^{2x}.$$

Por lo tanto

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n, & , \\ b_{n+1} = 2b_n & . \end{cases}$$

De lo cual $b_n = 2^n$ y $a_{n+1} = 2a_n + 2^n$. Esta última es una ecuación lineal de primer orden no homogénea con coeficiente constante. La solución general es de la forma $a_n = (\alpha + \beta n)2^n$. Sustituyendo obtenemos que

$$(\alpha + \beta(n+1))2^{n+1} = 2(\alpha + \beta n)2^n + 2^n$$

de lo cual

$$\beta 2^{n+1} = 2^n$$

y tenemos que $\beta = 1/2$. Para hallar α planteamos la condición inicial: $(\alpha + \beta 0)2^0 = 0$, luego $\alpha = 0$ y $a_n = n2^{n-1}$. Por lo tanto

$$f^{(100)}(1) = (a_{100} + b_{100}1)e^2 = (100.2^{99} + 2^{100})e^2 = 102.2^{99}.e^2 = 51.2^{100}.e^2.$$

EJERCICIO 5

Encontrar la función generatriz $f(x)$ de la sucesión $\{a_n\}$, $n \geq 0$ definida por

$$\{a_n\} * \{n^2\} = \{n\} \quad \text{para todo } n \geq 0$$

donde $*$ denota la convolución de sucesiones.

Indique la opción correcta:

(A) $f(x) = (1-x)/(1+x)^2$.

(B) $f(x) = (1+x)/(1-x)^3$.

(C) $f(x) = (1-x)/(1+x)$.

(D) $f(x) = (1+x)/(1-x)$.

(E) $f(x) = (1+x)x/(1-x)^3$.

SOLUCIÓN: **Es la (C).** Si $g(x)$ y $h(x)$ son las funciones generatrices de n^2 y n respectivamente, entonces se cumplirá que

$$f(x).g(x) = h(x),$$

de lo cual $f(x) = h(x)/g(x)$. Basta entonces hallar $g(x)$ y $h(x)$ y realizar la división:

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)' = x\frac{1}{(1-x)^2}.$$

A su vez

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^n\right)' = xh(x)' = x\frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

De lo cual

$$f(x) = \left(x\frac{1}{(1-x)^2}\right) / \left(x\frac{1+x}{(1-x)^3}\right) = \frac{1-x}{1+x}.$$

EJERCICIO 6

Hallar el menor natural n tal que dados n dígitos diferentes se puede asegurar que existen dos de ellos cuyos cuadrados diferirán en un múltiplo de 6.

Aclaración: se consideran dígitos a los enteros $0, 1, \ldots, 9$.

Sugerencia: Considere las clases de la relación de equivalencia $a \sim b$ si $|a^2 - b^2|$ es múltiplo de 6.

Indique la opción correcta:

(A) $n = 3$.

(B) $n = 4$.

(C) $n = 5$.

(D) $n = 6$.

(E) $n = 9$.

SOLUCIÓN: **Es la (C).** Basta hallar la cantidad de clases de equivalencia de la relación mencionada. Para ello hallamos todas las clases. Para facilitar las cuentas recordamos la factorización de $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

[0] = [6],

[1] = [7]=[5],

[2] = [4]=[8],

[3] = [9],

Al haber cuatro clases de equivalencia podemos elegir 4 dígitos (e.g. 0,1,2,3) sin que estén relacionados pero si elegimos cinco elementos (palomas), como cada uno pertenece a alguna clase (palomar) dos deberán pertenecer a la misma y por ende estar relacionados.

EJERCICIO 7

Sea G un grafo conexo que posee una arista puente e (es decir que e es una arista de G tal que $G - e$ es disconexo).

Considere las siguientes afirmaciones:

I) La cantidad de componentes conexas de $G - e$ es necesariamente igual a 2.

II) G no puede tener ningún recorrido euleriano.

III) Existen necesariamente por lo menos dos vértices de G que tienen grado impar.

Indique la opción correcta:

(A) Solo (I) y (II) son verdaderas.

(B) Solo (II) y (III) son verdaderas.

(C) Solo (I) y (III) son verdaderas.

(D) Solo (I) es verdadera.

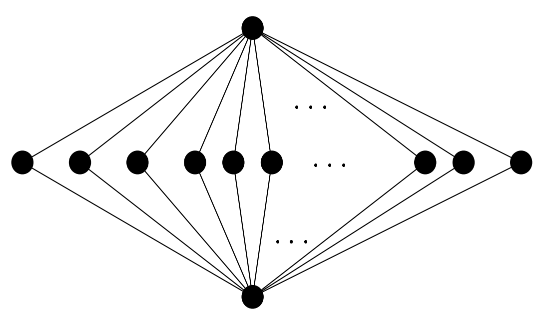
(E) Las tres afirmaciones son verdaderas.

SOLUCIÓN: **Es la (C)** La afirmación I) es verdadera ya que una arista puede unir a lo sumo a dos componentes conexas. La afirmación II) es falsa y un contraejemplo es cualquier camino con más de un vértices ya que cualquiera de sus aristas es un puente y él mismo es un recorrido. La opción III) es correcta ya que el grafo no es euleriano pues ningún grafo euleriano puede tener un puente ya que ningún circuito se desconecta al sacarle una de sus aristas.

EJERCICIO 8 ¿Cuántos árboles recubridores no isomorfos tiene $K_{2,100}$?

Sugerencia: Considere la inmersión plana de $K_{2,100}$ dada en la Figura.

Indique la opción correcta: (A) 48; (B) 100; (C) 99; (D) 2^{200}; (E) 50.



SOLUCIÓN: **Es la (E).** Llamemos a y b a los vértices de $K_{2,100}$ con grado 100 y $v_1 \dots v_{100}$ al los otros. Si T es un árbol recubridor, cada vértice v_i deberá tener grado 1 o 2 en T para no quedar aislado. Por otro lado no pueden haber más de un vértice v_i con grado 2 pues sino se formaría un ciclo y tampoco pueden ser todos lo vértices v_i hojas, pues a y b quedarían aislados. Por lo tanto existe un único vértices v_i de grado 2 y el resto son de grado 1. Las hojas las podemos agrupar en dos grupos según sean adyacentes a a o a b. De esta forma el árbol T y todos sus isomorfos quedan determinados por el grado de a y b que pueden ser (1,100), (2,99) ,. . . , (50,50), ya que el correspondiente árbol (i, j) es isomorfo al (j, i).

EJERCICIO 9

Sea G un grafo tal que al quitarle una de sus aristas se obtiene el grafo $K_{1,100}$. Calcule el polinomio cromático $p(\lambda)$ de G.

Indique la opción correcta:

(A) G es bipartito y posee 3.2^{99} coloraciones propias con 3 colores.

(B) G no es bipartito y posee 3.2^{100} coloraciones propias con 3 colores.

(C) G es bipartito y posee 8.3^{99} coloraciones propias con 4 colores.

(D) G tiene número cromático 4 y posee 15.2^{198} coloraciones propias con 5 colores.

(E) G tiene número cromático 3 y posee 3.2^{99} coloraciones propias con 3 colores.

SOLUCIÓN: **Es la (E).** Por un teorema visto en el teórico si denotamos con $[K_{1,n}]$ al polinomio cromático de $K_{1,n}$ tendremos que:

$$p(\lambda) = [K_{1,100}](\lambda) - [K_{1,99}](\lambda),$$

ya que hay un solo tipo de arista adicionable a $K_{1,n}$ y es una que una dos hojas, pero al identificar dos hojas de $K_{1,n}$ se obtiene un $K_{1,n-1}$. Como $K_{1,n}$ es un árbol, su polinomio cromático será $\lambda(\lambda - 1)^n$, de lo cual:

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{100} - \lambda(\lambda - 1)^{99} = \lambda(\lambda - 1)^{99}(\lambda - 2).$$

Por lo tanto el grafo tiene número cromático 3 y $3.2^{99}.1$ coloraciones con 3 colores.

EJERCICIO 10

Si G es un grafo y $e = uv$ una de sus aristas, denotamos con G'_e el grafo obtenido a partir de G al identificar los vértices u y v. Suponga que G'_e es isomorfo a K_5. Considere las siguientes afirmaciones.

I) G no es plano.

II) G posee necesariamente algún subgrafo homeomorfo a K_5.

III) G posee necesariamente algún subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$.

Indique la opción correcta:

(A) Solo (I) y (II) son verdaderas.

(B) Solo (II) y (III) son verdaderas.

(C) Solo (I) y (III) son verdaderas.

(D) Solo (I) es verdadera.

(E) Las tres afirmaciones son verdaderas.

SOLUCIÓN: **Es la opción (D).** La afirmación I) es cierta ya que si un grafo es plano al identificar los vértices de una cualquiera de sus arista el grafo obtenido lo sigue siendo (ver Figura 1 (a)).

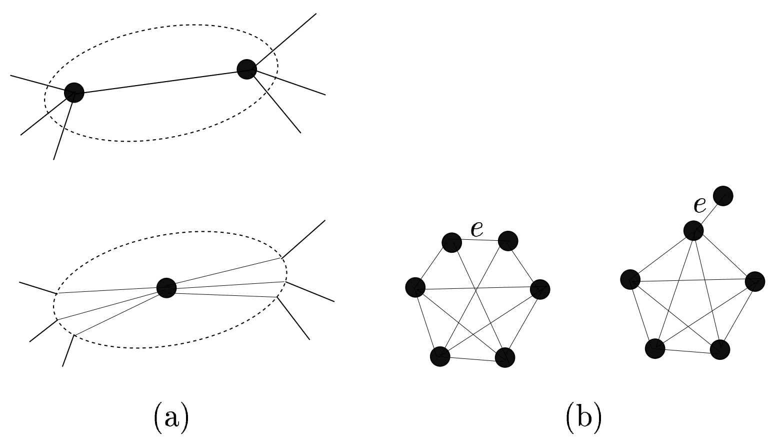


Figura 1:

Las opciones II) y III) son falsas y en la Figura 1 (b) se dan contraejemplos (el primero no puede tener un subgrafo homoeomorfo a K_5 por tener solo 4 vértices de grado 4 y el segundo no puede tener un subgrafo homoeomorfo a $K_{3,3}$ por tener solo 5 vértices con grado mayor o igual a 3).