# HOJA PARA EL ESTUDIANTE.

## 2do Parcial de Matemática Discreta I, año 2001.

Lunes 17 de diciembre de 2001.

| Parcial N | PRIMER RENGLÓN DE LA PRIMER PREGUNTA: |
|---|---|
| | |

| RESPUESTAS | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| | | | | | | | | | |

| RESPUESTAS | | | |
|---|---|---|---|
| 11 | 12 | 13 | 14 |
| | | | |

- Esta hoja es para que el estudiante anote sus respuestas y pueda compararlas con las respuestas correctas que serán publicadas en cartelera. Además contiene la siguiente información sobre el parcial: puntaje de las preguntas, fecha de publicación de la letra, de las respuestas y de los resultados.
- Antes que nada complete con todos sus datos personales la hoja de scanner y la de problemas. En "Asignatura-Instituto"ponga *Mat. Disc 1, IMERL.*, en fecha *17/12/01.*
- Cuando llene los óvalos de la hoja de scanner con el número de parcial recuerde marcar con cero el lugar de los *miles.*
- La prueba dura **3 horas** y es **"sin material".** Es decir, no se permite el uso de calculadoras, ni la consulta de libros o apuntes.
- El parcial consta de 14 preguntas divididas en tres partes:
  - Parte 1, de la pregunta 1 a la 6, es común a todos los estudiantes.

  - Parte 2, de la pregunta 7 a la 10, es exclusivamente para los estudiantes que **no** opten por la modalidad a distancia.
  - Parte 3, de la pregunta 11 a la 14, es exclusivamente para los estudiantes que **si** opten por la modalidad a **distancia**.

- Para optar por la modalidad "a distancia" rellenar el primer óvalo de "Casilla de Control" de la hoja de scanner. En otro caso, es decir, si no opta por el curso a distancia, deje los óvalos sin rellenar.
- En caso de contestar preguntas de la Parte 2 y de la Parte 3, se considerará que el estudiante **no** optó por el curso a distancia y se descartarán las respuestas de la Parte 3.
- Cada respuesta correcta vale 6 puntos. Evite contestar al azar, las preguntas múltiple opción mal contestadas serán penalizadas con -1 puntos mientras que las no contestadas valdrán 0 puntos.

# INFORMACIÓN ÚTIL PARA LUEGO DEL PARCIAL

- Hay estudiantes realizando la prueba en el Hall B y en el Hall del 3er piso: desde estos lugares se escuchan perfectamente los murmullos de la entrada y de la escalera respectivamente (sobre todo cuando estos murmullo son gritos).
- La letra y las respuestas del examen se publicarán el mismo día (lunes 17 de diciembre) a las 16:00 en la página web de la materia (http://www.fing.edu.uy/ webimerl/discreta1/principal.htm) y en la cartelera del IMERL.
- Los puntajes del parcial y las calificación final de la materia se publicarán el día **miércoles 26 de diciembre a la hora 16:00** para los estudiantes del curso normal, mientras que para los estudiantes del curso a distancia se darán el día **viernes 28 de diciembre a la hora 16:00**. Los reclamos deberán realizarse entre los días **lunes 7 y viernes 11 de enero del 2002 hasta las 14:00 horas**, depositando en la urna de Matemática Discreta I, que se encontrará en la entrada del IMERL, una hoja con su nombre y apellido, número de cédula de identidad y, en forma breve, qué es lo que reclama. Se darán respuesta a esos reclamos el **viernes 18 de enero a las 10:00 horas**. La muestra de las entregas del curso a distancia serán el **martes 15 a las 14:00**, para el curso normal no habrá muestra.

# Segundo Parcial de Matemática Discreta I
**Lunes 17 de diciembre de 2001**

| **Parcial N** | **Apellido y nombre** | **Cédula** |
|---|---|---|
| | | |
| **Opto por el curso "A DISTANCIA"(SI o NO):** | | |

| **RESPUESTAS COMUNES a todos los estudiantes.** | | | | | | **RESPUESTAS EXCLUSIVAS para el curso "NORMAL".** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| | | | | | | | | | |

| **RESPUESTAS EXCLUSIVAS para el curso "A DISTANCIA"** | | | |
|---|---|---|---|
| 11 | 12 | 13 | 14 |
| | | | |

## PARTE 1: Problemas comunes a todos los estudiantes.

**PROBLEMA 1**

Para cada natural positivo $n$ sea $V_n = \{1, 2, ..., n\}$, y $A_n = \{G : G \text{ y } \overline{G} \text{ son árboles sobre } V_n\}$.

**Indicar la opción correcta:**

(A) $A_n \neq \emptyset \;\; \forall n \geq 3$.

(B) $A_n = \emptyset \;\; \forall n \geq 3$.

(C) Existe $n_0 : A_{n_0} \neq \emptyset$ $y$ $\forall G_0 \in A_{n_0}, G_0$ tiene más de cuatro hojas.

(D) Si $A_{n_0} \neq \emptyset$ entonces $\forall G_0 \in A_{n_0}$, $G$ y $\overline{G}$ son isomorfos.

(E) Ninguna de las opciones anteriores es cierta.

*Aclaración:* $\overline{G}$ denota el grafo complementario de $G$.

**PROBLEMA 2**
Sea $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos tales que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Definimos $G_1 + G_2$ como el grafo cuyo conjunto de vértices es la unión de $V_1$ y $V_2$ y cuyas aristas son las de $G_1$ más las de $G_2$ más todas las aristas del tipo $\{u, v\}$ para todo $u \in V_1$ y $v \in V_2$. Es decir:

$$E(G_1 + G_2) = E_1 \cup E_2 \cup \{\{u, v\} : u \in V_1, v \in V_2\}.$$

Suponga que $G_1$ y $G_2$ son conexos con al menos una arista. Considere las siguientes afirmaciones:

(i) Si $G_1 = K_{2n}$, entonces $G_1 + G_2$ es euleriano si y solo si $G_2$ lo es.

(ii) Si $G_1$ y $G_2$ son eulerianos, entonces $G_1 + G_2$ también lo es.

(iii) Si $|V_1|$ y $|V_2|$ son pares, entonces $G_1 + G_2$ es euleriano si y solo si $G_1$ y $G_2$ lo son.

**Indicar la opción correcta:**

(A) Solo (i) y (ii) son correctas.

(B) Solo (i) y (iii) son correctas.

(C) Solo (ii) y (iii) son correctas.

(D) Solo (iii) es correctas.

(E) Ninguna es correcta.

*Aclaración:* Un grafo es *euleriano* si es conexo y posee un circuito euleriano.

**PROBLEMA 3**
Sea $G$ un grafo acíclico, con $n$ vértices y $k$ componentes conexas. Entonces

(A) $G$ tiene $n - k$ aristas.

(B) $G$ tiene $n+k-1$ aristas.

(C) $G$ tiene $k(n-1)$ aristas.

(D) $G$ tiene $n-2k+1$ aristas.

(E) Faltan datos para determinar el número de aristas de $G$.

**PROBLEMA 4**

Considere la sucesión numérica 1;3;5;6;8;2.

**Indique la opción correcta:**

(A) Es posible construir un grafo conexo con 6 vértices y 50 aristas de forma tal que la sucesión anterior represente el grado de sus vértices.

(B) Es posible construir un grafo con dos componentes conexas de forma tal que los vértices tengan por grado los elementos de la sucesión.

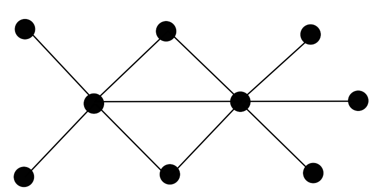
(C) No es posible construir un grafo tal que sus vértices tienen como grado los elementos de la sucesión.

(D) Existe un único grafo tal que sus vértices tengan como grado los elementos de la sucesión.

(E) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

**PROBLEMA 5**

Sea $n$ el número de subgrafos conexos recubridores no isomorfos del grafo de la figura.



**Indicar la opción correcta:**

(A) $n$ es 8.

(B) $n$ es 9.

(C) $n$ es $2^{10}$.

(D) $n$ es 5.

(E) $n$ es $2^5 - 8 + 1$.

**PROBLEMA 6**

Sea $a_n = |E(K_{n+1})|$ del número de aristas de $K_{n+1}$. Si llamamos $f(x)$ a la función generatriz de $a_n$, entonces $f(\frac{1}{2})$ vale:

(A) 2.

(B) 3.

(C) 4.

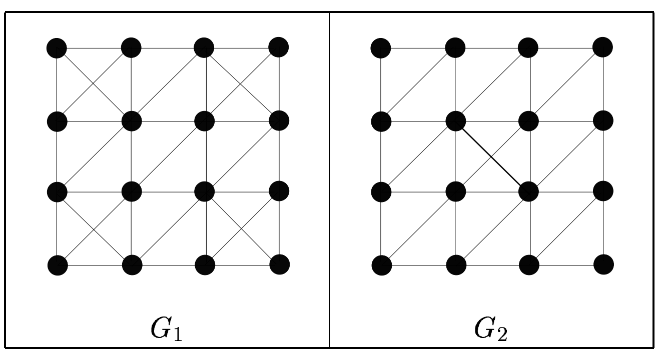
(D) 5.

(E) 6.

## PARTE 2: Problemas exclusivos para quienes NO optan por el curso a distancia.

**PROBLEMA 7**

Dados los grafos de la figura




**Indicar la opción correcta:**

(A) $G_1$ y $G_2$ son homeomorfos.

(B) $G_2$ es plano y una inmersión plana de él determina 20 regiones.

(C) $G_1$ es plano y contiene un subgrafo homeomorfo a $C_{18}$ y al menos uno isomorfo a $K_4$.

(D) $G_1$ es plano y contiene un subgrafo homeomorfo a $K_5$.

(E) Ninguno de los dos grafos es plano.

**PROBLEMA 8**

Sea $G$ un grafo conexo, plano y bipartito con $e$ aristas y $v$ vértices. Suponga que $e \geq 4$.

**Indicar la opción correcta:**

(A) Toda inmersión plana de $G$ limita $r$ regiones con $r \leq e/2$ y $e \leq 2v - 4$.

(B) Toda inmersión plana de $G$ limita $r$ regiones con $r \leq e/2$ y $e \leq 2v - 6$.

(C) Toda inmersión plana de $G$ limita $r$ regiones con $r \leq e/3$ y $e \leq 3v - 6$.

(D) Toda inmersión plana de $G$ limita $r$ regiones con $r > 2e/3$ y $e \leq 3v - 6$.

(E) Ninguna de las anteriores.

**PROBLEMA 9**

El número $n$ de palabras de 10 letras que se pueden formar con las 5 vocales si no pueden aparecer vocales iguales seguidas y si la primer vocal utilizada tiene que ser diferente de la cuarta es:

(A) $n = 2^{14}.5.13$.

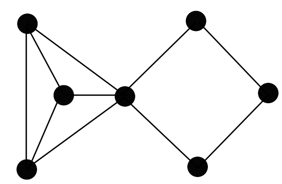
(B) $n = 3.4^7.5$.

(C) $n = 3.4^7.5^2$.

(D) $n = 5.4^9 - 5.4^8$.

(E) Ninguna de las anteriores.

**Sugerencia:** Dibujar el grafo asociado al problema y evaluar su polinomio cromático.



**PROBLEMA 10**
Considere el grafo $G$ de la figura.

El polinomio cromático y el número cromático de $G$ son respectivamente:

(A) $P(G,\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda^2-3\lambda+3)$ y $\chi(G) = 4$.

(B) $P(G,\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)^2$ y $\chi(G) = 4$.

(C) $P(G,\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda^2-3\lambda+3)$ y $\chi(G) = 3$.

(D) $P(G,\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda^2-3\lambda+3)$ y $\chi(G) = 5$.

(E) Ninguna de las anteriores opciones es válida.

## PARTE 3: Problemas exclusivos para quienes SI optan por el curso A DISTANCIA.

**PROBLEMA 11**
Sea $T$ un árbol 3-ario completo con $v$ vértices, $h$ hojas y altura mayor que 10.
**Indicar la opción correcta:**

(A) $2v - 3h = -1$.

(B) $3v - 2h = 2$.

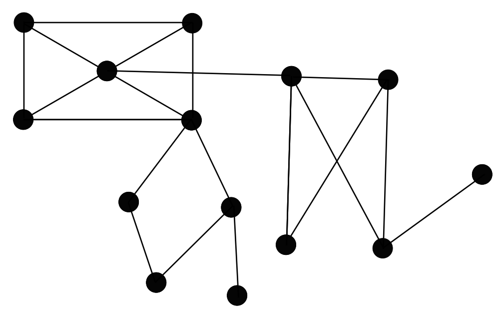
(C) $3v - h = 1$.

(D) $3v - h = 1$.

(E) Ninguna de las anteriores.

*Sugerencia:* Considere la suma de los grados de los vértices de $T$ viéndolo como grafo.

**PROBLEMA 12**
Dado el grafo de la figura,



**Indicar la opción correcta:**

(A) El grafo tiene 5 componentes biconexas y 5 vértices de articulación.

(B) El grafo tiene 3 componentes biconexas y 3 vértices de articulación.

(C) El grafo tiene 5 componentes biconexas y 7 vértices de articulación.

(D) El grafo tiene 6 componentes biconexas y 5 vértices de articulación.

(E) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

**PROBLEMA 13**
Sea $T = (V, E)$ un árbol binario completo tal que $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$. Se sabe que la altura de $T$ es 3 y que solo el subárbol izquierdo tiene vértices con dicha profundidad. Si la lista en orden posterior de $V$ es

$$d, e, b, h, i, f, j, k, g, c, a.$$

**Indicar la opción correcta:**

(A) Las hojas de $T$ son $d, e, h, f, j, g$ y la lista en orden previo es $a, i, b, d, e, h, c, k, f, j, g$.

(B) Las hojas de $T$ son $d, e, h, i, k, g$ y la lista en orden previo es $a, j, b, d, e, f, h, i, c, g, k$.

(C) Las hojas de $T$ son $d, b, f, k$ y La lista en orden previo es $a, i, e, d, h, b, c, j, f, g, k$.

(D) Las hojas de $T$ son $d, e, h, i, k, g$ y la lista en orden simétrico es $d, b, e, j, h, f, i, a, k, c, g$.

(E) Los nodos internos de $T$ son $a, b, c, f, j$ y la lista en orden simétrico es $d, b, e, j, h, f, i, a, k, g, c$.

**PROBLEMA 14**

Las letras $a, b, c, d, e, f, g$ aparecen en una muestra con las frecuencias $2, 3, 3, 4, 7, 8, 10$ respectivamente. Considere los siguientes códigos

- C1: $a = 0000, b = 0001, c = 001, d = 011, e = 10, f = 11, g = 01$.
- C2: $a = 0000, b = 0001, c = 0010, d = 0011, e = 100, f = 110, g = 01$.
- C3: $a = 000, b = 001, c = 010, d = 011, e = 100, f = 101, g = 111$.

**Indicar la opción correcta:**

(A) C1 es un código de prefijos de peso óptimo.

(B) C2 es un código de prefijos pero no es de peso óptimo.

(C) C3 es un código de prefijos de peso óptimo.

(D) Solo el C2 es un código de prefijos pero no es de peso óptimo.

(E) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.