# Solución prmer parcial, segundo semestre 2021
# Matemática Discreta I.

***Ejercicios de desarrollo (total 32 puntos)***

**1. Ejercicio**:
Se considera la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida de la siguiente forma:

$$a_n = 3.a_{n-1} + 5.a_{n-2}, \text{para todo } n \geq 2,\ a_1 = 3,\ \text{y } a_0 = \frac{6}{5}.$$

a) Calcular los primeros términos de la sucesión (sug.: calcule varios).
**Solución:**
Tenemos que: $a_0 = \frac{6}{5}\ a_1 = 3,\ a_2 = 15,\ a_3 = 60,\ a_4 = 255;$, mientras que $a_5 = 1065,\ a_6 = 4470,\ a_7 = 18735.$

*(Observe que a partir de $a_5$ los elementos verifican la desigualdad del próximo punto).*

b) Demostrar que $a_n > 4^n$, para todo $n \geq k$.

- Hallar $k$.
  **Solución:**
  Por lo visto en el ítem anterior, $k = 5$ vale. También vale cualquier $k \geq 5$.
- Demostrar por I.C. a partir del $k$ hallado en el ítem anterior (sug.: usar I.C. fuerte).
  **Solución:**
  Base IF) Observar que hay que chequear, para la demostración que está más adelante, en al menos dos valores consecutivos. Ya vimos arriba que $a_5$, $a_6$ y $a_7$ verifican la desigualdad.
  Hip. IF) $a_i > 4^i$, para todo $5 \leq i \leq n-1$;
  Tesis IF) $a_n > 4^n$.

  Para todo $n \geq 7$ (con lo cual $n-1 > n-2 \geq 5$) tenemos que

$$a_n = 3a_{n-1} + 5a_{n-2} \geq 3 \times 4^{n-1} + 5 \times 4^{n-2} = 4^{n-2}(3 \times 4 + 5) = 17 \times 4^{n-2} > 4^n.$$

*Nota útil:* $4^4 = 256,\ 4^5 = 1024,\ 4^6 = 4096.$

**2. Ejercicio**:

a) Una maestra quiere hacer una actividad sobre alimentación saludable, llevando a clase envases de distintos alimentos. Estos pueden contener (o no) octógonos negros de cuatro tipos: exceso de azúcares, exceso de grasas, exceso de grasas saturadas y exceso de sodio. ¿Cuántos envases tiene que llevar como mínimo, para asegurar que hay al menos dos envases distintos con exactamente los mismos octógonos?
**Solución:**
En cada envase cada octógono puede estar o no estar. Como son cuatro tipo de octógonos, tenemos $2^4$ posibilidades. Para asegurar que hay dos envases con los mismos octógonos, se necesitan $2^4 + 1$ envases (por Palomar).

b) Luego de haber hecho esta experiencia en todas las escuelas del país, la maestra tiene envases con todo tipo de variantes de octógonos, que lleva consigo para su segunda experiencia. En una bolsa gigante y oscura lleva lápices de colores y marcadores resaltadores. Hay muchísimos lápices de 10 colores distintos y muchísimos resaltadores con 5 variantes de colores fluorescentes y 6 variantes de colores pastel. Distribuye en el salón de actos sus envases, pone uno de cada tipo, y pone la bolsa tipo Papá Noel, en el medio del salón de actos. Cada niño pasa al centro, toma un objeto (lápiz o marcador resaltador), y lo pone en cualquier envase que el niño elija. Los niños no ven qué eligen de la bolsa. En la escuela hay 387 alumnos. Al finalizar la experiencia, ¿puedes asegurar que hay un lápiz o resaltador del mismo tipo y color repetido en algún envase?

**Solución:**
Para contar la cantidad de posibles extracciones de objetos de la bolsa se utiliza la regla de la suma. En total tenemos 21 posibles extracciones de la bolsa. A la vez hay 16 tipos de envases diferentes (los de la parte anterior), con lo cual tenemos (ahora regla del producto) $21 \times 16 = 336$ posibles envases llenos de lápices o marcadores sin repetir. El siguiente marcador o lápiz que se elija, se ponga donde se ponga, implicará una repetición. Entonces la respuesta es que habrá repetición, pues $387 > 336$.

**3. Ejercicio**:
¿De cuántas formas podemos repartir 20 pelotitas idénticas en cuatro cajas numeradas de forma que: cada una de las primeras dos cajas contengan una cantidad par de pelotitas, cada una de las dos últimas contengan una cantidad impar de pelotitas, y que la última caja contenga no más de 3 pelotitas?

**Solución:**
Es un típico problema en el que vale la pena utilizar Funciones Generatrices (FG) para resolverlo.

Queremos el coeficiente de $x^{20}$, de la función generatriz asociada a:

$$(1 + x^2 + x^4 + ...)(1 + x^2 + x^4 + ...)(x + x^3 + x^5 + ...)(x + x^3).$$

O sea, buscamos el coeficiente de $x^{20}$ de:

$$\frac{1}{1 - x^2} \times \frac{1}{1 - x^2} \times \frac{x}{1 - x^2} \times (x + x^3).$$

Utilizando la notación de las notas de FG de Qureshi (están en el eva del curso), procuramos:

$$[x^{20}]\ (\frac{x^2 + x^4}{(1 - x^2)^3}).$$

Pero esto es lo mismo que buscar el coeficiente de $x^{16}$ y el coeficiente de $x^{18}$ en $\frac{1}{(1-x^2)^3}$ y sumarlos, o sea:

$$([x^{16}] + [x^{18}])\ (\frac{1}{(1 - x^2)^3}).$$

Ahora, usando uno de los resultados centrales de Funciones Generatrices tenemos que:

$$([x^{16}] + [x^{18}])\ (\frac{1}{(1 - x^2)^3}) = ([x^{16}] + [x^{18}])\ (\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{C}_2^{n+2} (x^2)^n).$$

Tenemos que considerar $n = 8$ y $n = 9$, con lo cual tenemos que el coeficiente buscado es: $\mathrm{C}_2^{10} + \mathrm{C}_2^{11} = 45 + 55 = \mathbf{100}$.

**4. Ejercicio**:
En un colegio de magia ingresan 143 estudiantes nuevos, que deben ser distribuidos en cuatro casas. ¿Cuántas formas hay de hacerlo, si en cada casa se albergarán entre 30 y 40 estudiantes?

*(Los estudiantes se consideran indistinguibles).*

**Solución:**
Queremos resolver:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 143,$$

con las condiciones $30 \leq x_i \leq 40$, para $i = 1, 2, 3, 4$.

Haciendo los cambios de variables $y_i = x_i - 30$, para $i = 1, 2, 3, 4$, la ecuación anterior queda equivalente a:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 23,$$

con las condiciones $0 \leq y_i \leq 10$, para $i = 1, 2, 3, 4$.
Podemos aplicar el PIE.
Definimos:

$\Omega = \{$soluciones enteras de $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 23$, con $0 \leq y_i$, para $i = 1, 2, 3, 4\}$;
$A_1 = \{$soluciones enteras de $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 23$, con $11 \leq y_1$, $0 \leq y_i$, para $i = 2, 3, 4\}$;
$A_2$, $A_3$ y $A_4$, análogamente.
Lo que estamos buscando es: $\#\Omega - \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$ y usando PIE esto vale:

$$\#\Omega - \sum_{i=1}^{i=4} \#A_i + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \#(A_i \cap A_j) - \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} \#(A_i \cap A_j \cap A_k) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4).$$

Pero las intersecciones de a tres conjuntos y la intersección de cuatro conjuntos es vacía. Con lo cual la cuenta procurada es:

$$\#\Omega - \sum_{i=1}^{i=4} \#A_i + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \#(A_i \cap A_j).$$

Utilizando combinaciones con repetición, tenemos que $\#\Omega$ vale $\mathrm{CR}_{23}^{4} = \mathrm{C}_{23}^{26} = 2600$.

Por otro lado, evidentemente, $\#A_1 = \#A_2 = \#A_3 = \#A_4$, y para calcular $\#A_1$ debemos encontrar las soluciones de

$$z_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 12,$$

con $0 \leq z_1$, y $0 \leq y_i$, $i = 2, 3, 4$. Esto nos da que $\#A_1 = \mathrm{CR}_{12}^{4} = \mathrm{C}_{12}^{15} = 455$.

Finalmente nos resta calcular el cardinal de las intersecciones de a dos conjuntos. Todas las intersecciones tienen el mismo cardinal, y responde a encontrar las soluciones (por ejemplo) de:

$$z_1 + z_2 + y_3 + y_4 = 1,$$

con $0 \leq z_i$, $i = 1, 2$, y $0 \leq y_i$, $i = 3, 4$. Esto nos da que $\#(A_1 \cap A_2) = \mathrm{CR}_1^4 = \mathrm{C}_1^4 = 4$.

Teniendo en cuenta que hay $\mathrm{C}_2^4 = 6$ intersecciones de a dos conjuntos, tenemos que el número buscado es:

$$2600 - 4 \times 455 + 6 \times 4 = 200 - 1820 + 24 = \mathbf{804}.$$