Soluciones del primer parcial - 11/05/2021

Pregunta 1. Un conejito se encuentra inicialmente en la posición $(0,0)$. El conejito puede pasar en cada paso de la posición (x,y) a la posición $(x+1,y)$ o $(x,y+1)$. En algunas posiciones pueden haber lobos que el conejo deberá evitar. El objetivo del conejo es llegar a su madriguera que se encuentra en la posición $(7,6)$ sin pasar por por las posiciones donde se encuentran los lobos. Queremos saber de cuántas maneras podrá el conejito cumplir su objetivo según las siguientes situaciones:

A. Todas las casillas están libres de lobos.

B. Solo hay un lobo y este se encuentra en la posición $(3,2)$.

C. Hay dos lobos y estos se encuentran en las posiciones $(3,2)$ y $(5,4)$.

Solución.

A. Para llegar de $(0,0)$ a $(7,6)$ debemos dar 7 pasos a la derecha y 6 pasos para arriba (en algún órden). Luego la cantidad de maneras de hacerlo coincide con las permutaciones de DDDDDDDAAAAAA (cada D representa un paso a la derecha y cada A un paso para arriba), o sea $\binom{13}{7} = \frac{13!}{7!6!} = 1716$.

B. De los 1716 trayectos para llegar de $(0,0)$ a $(7,6)$ debemos quitarle aquellos que pasan por la posición $(3,2)$. Por el mismo razonamiento de la parte A tenemos $\binom{5}{3}$ formas de llegar de $(0,0)$ a $(3,2)$ y $\binom{8}{4}$ formas de llegar de $(3,2)$ a $(7,6)$; por la regla del producto hay $\binom{5}{3}\binom{8}{4} = 700$ trayectos que pasan por $(3,2)$. Luego la cantidad de trayectos que no pasan por la posición del lobo es $1716 - 700 = 1016$.

C. Podemos usar el PIE con dos condiciones: c_1 es que el conejo pase por $(3,2)$ y c_2 es que el conejo pase por $(5,4)$. La respuesta a esta parte viene dada por $\overline{N} = N - N(c_1) - N(c_2) + N(c_1c_2)$. Por la parte A tenemos $N = 1716$. Por la parte B tenemos $N(c_1) = 1016$ y con un razonamiento análogo obtenemos $N(c_2) = 1716 - \binom{9}{5}\binom{4}{2} = 1716 - 756 = 960$.

Pregunta 2. Sea N la cantidad de funciones inyectivas $f : \{1,2,\cdots,4\} \to \{1,2\cdots,8\}$ tales que $f(1) = 1$, $f(2)$ es impar y $3 \leq f(3) \leq 8$.

Entonces $N = ?$

Solución. Como $f(2)$ es impar y $f(2) \neq 1$ (pues f es inyectiva) tenemos 3 posibilidades para $f(2)$. Con $f(2)$ determinado tenemos 5 posibilidades para $f(3)$ (pues $3 \leq f(3) \leq 8$ y $f(3) \neq f(2)$). Luego habiendo determinado $f(2)$ y $f(3)$ (y $f(1) = 1$ que ya estaba determinado desde el principio) nos quedan $8-3 = 5$ posibilidades para $f(4)$. Por la regla del producto $N = 3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$.

Pregunta 3. Dada la función generatriz $f(x) = \dfrac{2x}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{(1-mx)}$, si se sabe que el coeficiente de x^4 es 24, entonces $m = ?$

Solución. Utilizando la fórmula de potencia negativa de binomio tenemos que $f(x) = 2x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} m^n x^n$. Luego el coeficiente de x^4 de $f(x)$ viene dado por $2 \cdot \binom{3+1}{1} + m^4 = 8 + m^2 = 24$, tenemos que $m^4 = 16$ de donde $m = \pm 2$ (cualquiera de las dos respuestas son correcta).

Pregunta 4. Hallar el término a_{712} de la sucesión que verifica la siguiente relación de recurrencia y condiciones iniciales: $a_{n+2} + a_n = 2(-1)^n$, $a_0 = -4$, $a_1 = 3$.

Solución. Para n par tenemos $a_{n+2} + a_n = 2$, de donde $a_{n+2} = 2 - a_n$. Observamos que $a_2 = 2 - a_0$, $a_4 = 2 - a_2 = 2 - (2 - a_0) = a_0$, $a_6 = 2 - a_4 = 2 - a_0$, $a_8 = 2 - a_6 = 2 - (2 - a_0) = a_0$, y así sucesivamente. Afirmamos que si n es múltiplo de 4 entonces $a_n = a_0$ y lo probamos por inducción (o sea queremos probar que $a_{4m} = a_0$ para todo $m \geq 0$). Para $m = 0$ tenemos $a_{4m} = a_0$ se cumple. Suponiendo que $a_{4m} = a_0$ entonces $a_{4(m+1)} = a_{4m+2+2} = 2 - a_{4m+2} = 2 - (2 - a_{4m}) = a_{4m} = a_0$. Luego $a_n = a_0 = -4$ para todo n que sea múltiplo de 4 y como $n = 712$ lo es, resulta $a_{712} = -4$.

Pregunta 5. Un estudiante de ingeniería deposita 110 dólares en una cuenta de un banco de plaza que paga un interés mensual de $0,6\,\%$. Al principio de cada mes deposita 30 dólares en esa misma cuenta. Si continua haciendo esto durante 4 años ¿Cuántos dólares podrá retirar del cajero al finalizar el período?

Obs. Suponer que el cajero solo puede retornar una cantidad entera de dólares (por ejemplo 17 dólares pero no 17.5 dólares) y nunca retorna más del disponible en la cuenta (por ejemplo si en la cuenta hay 17.99 dólares entonces puede retirar 17 dólares pero no 18).

Solución. Llamemos a_n a la cantidad de dólares disponibles en el banco en el n-ésimo mes. La cantidad inicial es $a_0 = 110$ dólares. Observemos que en el mes $n+1$-ésimo el banco le pagará $0{,}006a_n$ dólares de intereses, que sumados a los a_n dólares que ya tenía en su cuenta desde el mes anterior y a los 30 dólares que deposita al comienzo del mes resulta: $a_{n+1} = 1{,}006 \cdot a_n + 30$ para todo $n \geq 0$. La solución general de la homogénea es $a_n^{(H)} = \alpha \cdot (1{,}006)^n$ y sabemos que existe una solución particular de la forma $a_n^{(P)} = A$ con $A \in \mathbb{R}$. La solución particular debe verificar $A = A \cdot 1{,}006 + 30$ por lo tanto $A = -5000$. Luego la solución de nuestro problema será de la forma $a_n = \alpha(1{,}006)^n - 5000$. Con $a_0 = \alpha - 5000 = 110$ obtenemos $\alpha = 5110$ y $a_n = 5110 \cdot (1{,}006)^n - 5000$. En particular, el saldo de la cuenta al cabo de 4 años será $a_{48} = 5110 \cdot (1{,}006)^{48} - 5000 = 1809{,}637\ldots$. La cantidad de dólares que podrá retirar del cajero será entonces 1809.

Pregunta 6. Sea $a(n)$ la cantidad de palabras de largo n (con o sin sentido) que usan solo las letras E,L,O tal que no posea dos vocales consecutivas. Entonces $a(4) + a(8) =$?.

Solución. Por chequeo directo tenemos $a(1) = 3$ y $a(2) = 4$. Para $n \geq 3$ observamos que de las $a(n)$ palabras de largo n que cumplen las condiciones requeridas, $a(n-1)$ terminan en L, $a(n-2)$ terminan en LE y $a(n-2)$ terminan en LO. Luego $a(n) = a(n-1) + 2a(n-2)$ para $n \geq 3$. El polinomio característico de esta recurrencia $p(x) = x^2 - x - 2$ tiene raices 2 y -1 por lo que $a_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n$. Con las condiciones iniciales obtenemos $\alpha = 7/6$ y $\beta = -4/6$, luego $a_n = \frac{7 \cdot 2^n - 4 \cdot (-1)^n}{6}$ de donde $a(6) = 74$, $a(8) = 298$ y $a(6) + a(8) = 372$ (otra forma es usar directamente la recurrencia para obtener $a(3) = a(2) + 2a(1) = 10$, $a(4) = a(3) + 2a(2) = 18$, $a(5) = a(4) + 2a(3) = 38$, $a(6) = a(5) + 2a(4) = 74$, $a(7) = a(6) + 2a(5) = 150$ y $a(8) = a(7) + 2a(6) = 298$).

Pregunta 7. Sea N la cantidad de relaciones simétricas que hay en un conjunto con 4 elementos $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_4\}$ tales que todos los elementos del conjunto están relacionados consigo mismos. Entonces $N =$?.

Solución. La matriz tiene que ser simétrica y tener 1s en la diagonal principal (pues $(1,1), (2,2), (3,3)$ y $(4,4)$ deben estar en la relación). Al ser simétrica queda determinada por las 6 entradas en la parte triangular superior de la matriz, donde cada entrada puede ser un 0 o un 1, por lo tanto la respuesta es $2^6 = 64$.

Pregunta 8. Cada versión consistía de 4 preguntas (iguales o similares a las que colocamos aquí) y se pedía marcar todas las opciones correctas.

A. Sea $A(n)$ una afirmación relativa a n natural. Supongamos que $A(0)$ sea verdadera y que para todo n, la veracidad de $A(n)$ implica la veracidad de $A(n+2)$. Entonces $A(2020)$ es verdadero pero $A(2021)$ podría ser falso.

   La afirmación será verdadera para todos los pares (en particular para 2020), para los impares podría ser falso (por ejemplo considerar la afirmación $A(n) : \frac{n}{2} \in \mathbb{Z}$). Luego A es verdadera.

B. Sea $A(n)$ una afirmación relativa a n natural. Supongamos que para todo n, la veracidad de $A(n)$ implica la veracidad de $A(n+1)$. Entonces podemos garantizar que existe n_0 tal que $A(n)$ es verdadero para todo $n \geq n_0$.

   Falso. Como contraejemplo basta considerar la afirmación $A(n) : n > n+1$.

C. $Sob(8,6) + 6.Sob(8,5)$ cuenta la cantidad de formas de distribuir 8 pelotitas numeradas en 6 recipientes numerados de forma que haya al menos 5 recipientes no vacíos.

   Verdadero. Hay $Sob(8,6)$ formas de distribuir 8 pelotitas numeradas en 6 recipientes numerados tal que ninguno quede vacio. Para contar la cantidad de formas de distribuir 8 pelotitas numeradas en 6 recipientes numerados tal que haya exactamente uno vacio observamos que hay 6 formas de elegir el recipiente que quedará vacio, luego que determinamos el recipiente que quedará vacio hay $Sob(8,5)$ formas de repartir las 8 pelotitas en las otras 5 cajas sin que ninguna quede vacia, dando un total de $6 \cdot Sob(8,5)$. Como son casos disjuntos se suman.

D. En el principio de inclusión-exclusión para tres condiciones $c_1, c_2 y c_3$ el parámetro $S_1 = N(c_1) + N(c_2) + N(c_3)$ cuenta el número de elementos que verifica exactamente una de las condiciones c_1, c_2, c_3.

Falso. El parámetro S_1 cuenta los elementos que verifican al menos alguna de las condiciones, de hecho si un elemento verifica exactamente k de las 3 condiciones este será contado k veces (recomendamos dibujar un diagrama de Venn de multiplicidades para verlo mejor).

E. Sea $A(x)$ la función generatriz asociada a una sucesión (a_n). Si (a_n) verifica una recurrencia lineal homogénea con polinomio característico $p(x) = x^2 + 3x + 5$ entonces el producto $(5x^2 + 3x + 1).A(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que 1.

Verdadero. Para $n \geq 2$ el coeficiente de x^n de $(1+3x+5x^2)(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots)$ es $a_n+3a_{n-1}+5a_{n-2}$ que vale 0 (pues el polinomio característico es $p(x) = x^2 + 3x + 5$).

F. Sean $A(x), B(x)$ y $C(x)$ tres funciones generatrices tales que $A(x).B(x) = C(x)$. Si $C(x)$ es invertible entonces $A(x)$ también lo será.

Verdadero. Recordar que $A(x)$ es invertible si y solo si $A(0) \neq 0$. Si $C(x)$ es invertible tenemos $C(0) \neq 0$ por lo tanto $A(0) \cdot B(0) = C(0) \neq 0$, lo cual implica $A(0) \neq 0$.

G. Sea $A(x)$ una función generatriz cuya inversa es un polinomio $B(x)$. Entonces podemos realizar el cambio de variable x por $1-x$ obteniendo una función generatriz $A(1-x)$ que verifica $A(1-x) = \dfrac{1}{B(1-x)}$.

Falso. Tomar por ejemplo $A(x) = \frac{1}{1-x^2}$, si luego de ese cambio de variable obtuvieramos una función generatriz $A(1-x) = \frac{1}{1-(1-x)^2} = \frac{1}{2x-x^2}$ resultaría que $(2x-x^2) \cdot A(1-x) = 1$, pero observar que si $A(1-x)$ es una función generatriz entonces necesariamente el término independiente de $(2x-x^2) \cdot A(1-x)$ sería 0 llegando a una contradicción.

H. Sea (a_n) una sucesión que verifica una recurrencia homogénea con polinomio característico $p(x) = x^2 - 5x + 6$. Si $a_0 = 1/6$ y a_1 es entero entonces a_n es entero para todo $n \geq 2$.

Verdadero. Tenemos $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ para $n \geq 0$ y en particular $a_2 = 5a_1 + 6a_0 = 5a_1 + 1$ será entero. Por inducción, sea $n \geq 3$ y supongamos que a_k sea entero para todo k, $1 \leq k < n$. Como $n \geq 3$ tenemos que $k = n - 1$ y $k = n - 2$ verifican $1 \leq k < n$ y por hipótesis inductiva a_{n-2} y a_{n-1} serán enteros. Luego $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ también lo será.

I. Si una relación (no vacia) es simultáneamente simétrica y antisimétrica entonces es reflexiva o irreflexiva.

   Falso. Considerar la relación $R = \{(1,1)\}$ en el conjunto $A = \{1,2\}$. Tenemos que R es simétrica y antisimétrica pero no es ni reflexiva ni irreflexiva.