

PRIMER PARCIAL – MIÉRCOLES 14 DE OCTUBRE DE 2020

Nro. de Examen

Cédula

Apellido y nombre

**No llenar**

Escribir nombre y cédula en todas las hojas que se entreguen. El parcial dura tres horas. Las respuestas a los ejercicios del 1 al 5 deben ir en la tabla correspondiente. No está permitido usar calculadora ni “material”.

Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Ej 5	Ej 6

**Ejercicio 1.**(5 pts.) Sean  $I_1 = \{1, \dots, 5\}$  e  $I_2 = \{6, \dots, 9\}$ . Se define un emparejamiento de  $I_1$  e  $I_2$  como una función biyectiva:  $f : I_1 \cup I_2 \rightarrow I_1 \cup I_2$  tal que  $f(i) < f(j)$  si  $i, j \in I_1$  con  $i < j$ , y  $f(i) < f(j)$  si  $i, j \in I_2$  con  $i < j$ . ¿Cuántos emparejamientos posibles hay de  $I_1$  e  $I_2$ ?

**Ejercicio 2.**(5 pts.) Se repartirán 60 paquetes de vacunas en 3 ciudades distintas llamadas Ambar, Esmeralda y Rubi. En Ambar existen tres hospitales y todos recibirán la misma cantidad de paquetes. En Esmeralda también hay tres hospitales y entre ellos se repartirán equitativamente los paquetes. En Rubí existen 2 hospitales, pero el mayor de ellos recibirá el doble de paquetes que el otro. ¿De cuántas maneras podemos repartir los 60 paquetes entre las 3 ciudades de manera que todos los hospitales reciban al menos un paquete?

**Ejercicio 3.**(5 pts.) ¿Cuántos números enteros hay entre 1 y  $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$  inclusive que no son divisibles por ninguno de los enteros 7,11,13?

**Ejercicio 4.**(5 pts.) Sean  $(a_n)$  y  $(b_n)$  las sucesiones asociadas a las funciones generatrices  $A(x) = \frac{1+2x}{(1-x)^2}$  y  $B(x) = \frac{1}{(1+2x)(1-x)}$ . Sea  $(c_n)$  la convolución de ambas sucesiones. ¿Cuánto vale  $c_{10}$ ?

**Ejercicio 5.**(5 pts.) Se consideran dos sucesiones  $(a_n)$  y  $(b_n)$  que verifican el sistema de recurrencias:

$$\begin{cases} a_{n+1} = b_n - a_n, \\ b_{n+1} = 3a_n + b_n, \end{cases}$$

para todo  $n \geq 0$  y las condiciones iniciales  $a_0 = \frac{1}{2^{10}}$  y  $b_0 = \frac{1}{2^{11}}$ . ¿Cuánto vale  $a_{14} + b_{14}$ ?

**Complete sus respuestas exclusivamente en el cuadro a continuación:**  
(solo escriba números, no coloque fórmulas ni expresiones matemáticas)

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5

**Ejercicio 6** (ejercicio de desarrollo). Justifique todas las respuestas.

- (5 pts.) Enuncie el principio de buen orden (P.B.O.).
- (5 pts.) Pruebe el principio de inducción completa (P.I.C.) a partir del P.B.O.
- (5 pts.) Use el P.I.C. para probar que  $\frac{n^5-n}{5}$  es entero para todo entero  $n \geq 0$ .