Matemática Discreta 1

Primer Parcial

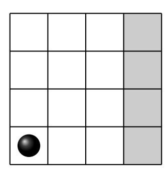
Miércoles 26 de setiembre de 2018

El parcial dura tres horas, cada ejercicio múltiple opción vale cuatro puntos y no se restan puntos.
No está permitido usar calculadora ni "material".

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5
B	B	C	A	D

Ejercicios de Múltiple Opción

Ejercicio MO1: Se tiene un tablero de 4 filas y 4 columnas como el de la figura y se tiene una ficha en la casilla inferior izquierda. Se la quiere llevar a alguna casilla de la columna pintada de gris, con movimientos hacia la derecha y hacia arriba ¿De cuántas formas se puede hacer?



A) 34 **B)** 35 **C)** 70 **D)** 126

Resolución: Seguro de deben hacer 3 movimientos a la derecha y a lo sumo 3 hacia arriba. Si i es la cantidad de movimiento hacia abajo que se hacen, la respuesta es

$$\sum_{i=0}^{3} C_i^{3+i} = 1 + \frac{4}{1!} + \frac{5.4}{2!} + \frac{6.5.4}{3!} = 1 + 4 + 10 + 20 = 35$$

Ejercicio MO2: Sea la función

$$f(x) = \frac{x}{12 - 2x - 2x^2}.$$

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, hallar a_8.

A) $a_8 = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^8} - \frac{1}{3^8}\right)$

B) $a_8 = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2^8} - \frac{1}{3^8}\right)$

C) $a_8 = \frac{3}{5}(-2^8 + 3^8)$

D) $a_8 = -2^7$

Resolución:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{12-2x-2x^2} = \frac{x}{2(6-x-x^2)} = \frac{x}{2(2-x)(3+x)} = \frac{1/5}{2-x} + \frac{-3/10}{3+x} \\ &= \frac{1}{10}\frac{1}{1-x/2} + \frac{-1}{10}\frac{1}{1-(-x/3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10}\frac{x^n}{2^n} + \frac{-1}{10}\frac{x^n}{(-3)^n} \\ \Rightarrow a_8 &= \frac{1}{10}\frac{1}{2^8} + \frac{-1}{10}\frac{1}{(-3)^8}. \end{aligned}$$

Ejercicio MO3: Una maestra de escuela reparte un cubo por cada alumno pidiéndoles que pinten cada cara de rojo o azul. Al terminar ponen los cubos en una bolsa ¿Cuál es la mínima cantidad de niños para la cual seguro hay dos cubos indistinguibles?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 64

Resolución: Separamos primero en la cantidad de colores de cada tipo, que pueden ser 0 y 6, 1 y 5, 2 y 4, 3 y 3, pues un cubo tienen 6 caras. En el caso 0 y 6, son dos casos: o bien todos pintados de rojo o bien todos pintados de azul. En el caso 1 y 5, o sea cuando se pinta una cara de un color y las otras cinco del otro, son dos casos posibles. En el caso 2 y 4, distinguimos según las dos caras pintas con el mismo color sean opuestas o adyacentes, así que son $2 \times 2 = 4$ casos. Por último, en el caso 3 y 3, nos fijamos como estás distribuidas las caras de rojo. Si hay dos caras rojas opuestas, hay un solo caso, si no hay ninguna opuesta, también hay un solo caso posible, en total son 2 posibilidades. Así que el total son $2+2+4+2=10$, para que se repitan dos pintadas deben hacer 11 alumnos.

Ejercicio MO5: Se tira un dado 5 veces. Calcular la cantidad de maneras en las que la suma de las 5 tiradas es exactamente 15.
Aclaración: importa el orden de las tiradas.

A) 651 B) 652 C) 653 D) 931

Resolución: Si x_i es el número que sale en la i-ésima tirada, entonces la cantidad de posibles tiradas es igual a la cantidad de soluciones de la ecuación
$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=15$ con $1 \leq x_i \leq 6$, lo cual es equivalente a

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10: \qquad 0 \leq x_i \leq 5.$$

Por el principio inclusión-exclusión es

$$CR_{10}^5 - 5CR_4^5 = C_{10}^{14} - 5C_4^8 = \frac{14!}{10!4!} - 5\frac{8!}{4!4!} = \frac{14.13.12.11}{4.3.2} - \frac{5.8.7.6.5}{4.3.2}$$
$$= 7.13.11 - 5.2.7.5 = 7(143-50) = 7.93 = 651.$$

Ejercicio MO4: Consideremos la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que para todo $n \in \mathbb{N}$ cumple:

$$a_{n+2}+a_{n+1}=2a_n$$

Hallar a_2 sabiendo que $a_1=2046$ y $a_{11}=0$.

A) $a_2=-2044$
B) $a_2=2044$
C) $a_2=2048$
D) $a_2=2052$

Resolución: Ecuación característica: $\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$ de donde $a_n = A(-2)^n + B$. Imponiendo las condiciones de borde tenemos

$$\begin{cases} a_1 = A(-2)^1 + B = 2046 \\ a_{11} = A(-2)^{11} + B = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2A + B = 2046 // -2A + 2048A = 2046 // A = 1 \\ -2048A + B = 0 // B = 2048 \end{cases}$$

de donde $a_2 = (-2)^2 + 2048 = 4 + 2048 = 2052$.

Ejercicios de Desarrollo

Ejercicio de Desarrollo 1: (10 ptos) Consideramos la sucesión a_n que satisface

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3a_{n-3} \qquad \forall n \geq 3\,,$$

con $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3$. Demuestre que existe n_0 tal que $2^n \leq a_n \leq 3^n$ para todo $n \geq n_0$.

Resolución: Por inducción fuerte:

Paso base:

$3^0 = 1 \geq a_0 = 1 \geq 2^0 = 1$,
$3^1 = 3 > a_1 = 2 \geq 2^1 = 2$,
$3^2 = 9 > a_2 = 3 < 2^2 = 4$,
$3^3 = 27 > a_3 = 10 > 2^3 = 8$,
$3^4 = 81 > a_4 = 22 > 2^4 = 16$,
$3^5 = 243 > a_5 = 51 > 2^5 = 32$.

Paso inductivo: para $n \geq 6$ tenemos

$$\begin{aligned} a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3a_{n-3} &\leq 3^{n-1} + 2 \times 3^{n-2} + 3 \times 3^{n-3} = 3^{n-3}(9 + 6 + 3) = 3^{n-3}18 \leq 3^{n-3}27 = 3^n \\ &\geq 2^{n-1} + 2 \times 2^{n-2} + 3 \times 2^{n-3} = 2^{n-3}(4 + 4 + 1) = 2^{n-3}9 > 2^{n-3}8 = 2^n. \end{aligned}$$

Ejercicio de Desarrollo 2: Demostrar las siguientes igualdades.

Sugerencia: usar un argumento combinatorio.

1) (5 ptos)

$$n^m = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \mathsf{Sob}(m,i)$$

2) (5 ptos)

$$\mathsf{Sob}(m+1,n) = n\big(\mathsf{Sob}(m,n-1) + \mathsf{Sob}(m,n)\big)$$

Resolución: 1) n^m es la cantidad de funciones sin restricciones. El miembro de la derecha es dicha cantidad separada según el cardinal de la imagen del dominio. $\binom{n}{i}$ es la cantidad de formas de elegir los i elementos de la imagen, mientras que $\mathsf{Sob}(m,i)$ las formas de enviar los m elementos en los i.

2) Se considera un elemento a distinguido del dominio. Se divide el conjunto de funciones sobreyectivas de $m+1$ en n en dos conjuntos, uno donde el elemento la imagen de a tiene una sola preimagen, y otro donde tiene más de una preimagen.

Para formar una función del primer conjunto, primero elegimos la imagen de a de n formas distintas. Luego elegimos las imágenes de los otros m elementos distintos de a de forma tal que cubran los $n-1$ elementos del dominio distintos de la imagen de a elegida previamente. De esta formar la única preimagen de la imagen de a es a mismo. En total, por la regla del producto hay $n \times \mathsf{Sob}(m,n-1)$ formas de hacerlo.

Para formar una función del segundo conjunto, primero elegimos la imagen de a de n formas distintas. Luego elegimos en forma independiente de la elección anterior, las imágenes de los otros m elementos distintos de a de forma tal que cubran los n elementos del dominio, de ésta forma nos aseguramos que la imagen de a otra preimagen, además de a. En total, por la regla del producto hay $n \times \mathsf{Sob}(m,n)$ formas de hacerlo.

En total, por la regla de la suma, tenemos $n\mathrm{Sob}(m, n-1) + n\mathrm{Sob}(m, n)$ posibles funciones.