Matemática Discreta 1

Primer Parcial

Jueves 3 de mayo de 2018

El parcial dura tres horas y media, cada ejercicio múltiple opción vale cinco puntos y no se restan puntos.
No está permitido usar calculadora ni "material".

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5
B	C	C	C	B

Ejercicios de Múltiple Opción

Ejercicio Múltiple Opción 1: La cantidad de elementos del conjunto $\{f : \{1, 2, \ldots, 6\} \to \mathcal{P}\{1, 2, \ldots, 6\}$: f inyectiva,$1 \notin f(1), 2 \notin f(2)\}$ es:

A) $63 \cdot 62 \cdot 61 \cdot 60 \cdot 59$ **B)** $16 \cdot 63 \cdot 62 \cdot 61 \cdot 60 \cdot 59$ **C)** $16 \cdot 64 \cdot 62 \cdot 61 \cdot 60 \cdot 59$.

Resolución: Usamos la regla de la suma y distinguimos dos casos, o bien $2 \notin f(1)$ o bien $2 \operatorname{inf}(2)$, y luego la del producto: Caso 1) f inyectiva y $2 \in f(1)$, tenemos entonces: $f(1)$ puede ser elegido de entre $2^{6-2} = 16 = |\{\{2\} \cup S : S \subset \{3, 4, 5, 6\}\}|$ subconjuntos. Luego, $f(2)$ puede ser elegido de entre $2^5 = 32 = |\mathcal{P}(\{1, 3, 4, 5, 6\})|$ subconjuntos, $f(3)$ puede ser elegido de entre $2^6 - 2 = 62$ subconjuntos, $f(4)$ de entre 61 subconjuntos, $f(5)$ de entre 60 y $f(6)$ de entre 59 subconjuntos, subconjuntos. Total de posibilidades: $16 \cdot 32 \cdot 62 \cdot 61 \cdot 60 \cdot 59$ formas.
Caso 2) f inyectiva y $2 \notin f(1)$, tenemos entonces: $f(1)$ puede ser elegido de entre $2^{6-2} = 16 = |\{S : S \subset \{3, 4, 5, 6\}\}|$ subconjuntos. Luego, $f(2)$ puede ser elegido de entre $2^5 - 1 = 31 = |\mathcal{P}(\{1, 3, 4, 5, 6\}) \setminus f(1)|$ subconjuntos, $f(3)$ puede ser elegido de entre $2^6 - 2 = 62$ subconjuntos, $f(4)$ de entre 61 subconjuntos, $f(5)$ de entre 60 y $f(6)$ de entre 59 subconjuntos, subconjuntos. Total de posibilidades: $16 \cdot 31 \cdot 62 \cdot 61 \cdot 60 \cdot 59$ formas.
En total serán $16 \cdot 63 \cdot 62 \cdot 61 \cdot 60 \cdot 59 = 16 \cdot 63!/58!$

Ejercicio Múltiple Opción 2: Se desea armar la primera fecha de un campeonato de la liga local de basquet. La liga es conformada por nueve equipos, por lo que un equipo deberá tomarse la fecha libre. ¿Cuántas formas hay de armar la fecha, si es relevante al conteo quien es el local y quien es el visitante en cada partido?

A) 630 **B)** 1680 **C)** 15120.

Resolución: Como un equipo quedará libre, primero lo elegimos (de 9 formas posibles). Luego, con los 8 que quedan elegimos cuatro locatarios de C_4^8 formas posibles. Finalmente colocamos los locatarios en una fila y sus contrincantes en otra enfrentada, de $4!$ formas. En total serán

$$9 \cdot C_4^8 \cdot 4! = 9\frac{8!}{4!} = 15120.$$

Ejercicio Múltiple Opción 3: ¿Cuántas permutaciones de la palabra "PAPELES" no dejan dos letras juntas?

A) 540 **B)** 600 **C)** 660.

Resolución: Por Inclusión-Exclusión:

$$\frac{7!}{2!2!}-\frac{6!}{2!}-\frac{6!}{2!}+5! = 5!(7{\cdot}6/4-6+1) = 5!(21-10)/2$$

$$= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 11 = 660.$$

Ejercicio Múltiple Opción 4: Un cierto tipo cebollitas tienen un período de maduración a partir del cual generan dos cebollitas más. Se quiera saber si cortando K cebollitas inmaduras a partir del segundo período, la población se mantiene estable. Suponiendo que se comienza con una plantación de 20 cebollitas inmaduras. Indique la opción correcta:

A) Existe K y es menor que 30.

B) Existe K y es mayor que 40.

C) Ninguna de las anteriores.

Resolución: Sea a_n el total de cebollitas, a_n' las inmaduras, a_n'' las maduras y K la cantidad cortada. Entonces

$$\begin{cases} a_n = a_n' + a_n'' - K \qquad n \geq 2 \\ a_n' = 2a_{n-1}'' \\ a_n'' = a_{n-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n = 2a_{n-2} + a_{n-1} - K$$

Cuya ec. car. es $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ o sea $\lambda = -1$ o 2. Por lo tanto una solución particular será una constante $a_n^p = A$ con $A = 2A + A - K$ de donde $A = K/2$. La solución general será $a_n = \alpha(-1)^n + \beta 2^n + K/2$. Como $a_0' = 20$ y $a_0'' = 0$ entonces $a_0 = 20$ y $a_1 = 20$, de donde

$$\begin{cases} 20 = \alpha + \beta + K/2 \\ 20 = -\alpha + 2\beta + K/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 40 = 3\beta + K \Rightarrow \beta = (40-K)/3 \Rightarrow K = 40$$

Por lo tanto la opción correcta es la **C)**

Ejercicio Múltiple Opción 5: Un grupo de tres estudiantes compra una docena de bizcochos cada día. Todos quieren al menos un pan con grasa, y uno de ellos quiere solamente el pan con grasa y dos vigilantes. Si en la panadería hay solo cinco de tres tipo de bizcochos: pan con grasa, vigilantes y comunes salados. ¿Cuál es la menor cantidad de días que deben pasar para para que seguro se repita su pedido?

A) 9 **B)** 10 **C)** 11.

Resolución: Será la cantidad de posibles elecciones más uno. La cantidad de elección es la cantidad de soluciones enteras de

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12,$$

$$t.q. \quad 3 \leq x_1 \leq 5, 2 \leq x_2 \leq 5, 0 \leq x_3 \leq 5.$$

que es equivalente a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7,$$

$$t.q. \quad 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 3, 0 \leq x_3 \leq 5.$$

que son todas las combinaciones de x_1 y x_2 que suman como mínimo 2 o sea $x_1x_2 \in \{02, 03, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23\}$, o sea 9. La respuesta es $9 + 1 = 10$.

También se puede hacer por inclusión exclusión:

$$CR_7^3 - CR_4^3 - CR_3^3 - CR_1^3 + CR_0^3 =$$

$$= C_2^9 - C_2^6 - C_2^5 - C_2^3 + C_2^2$$

$$= 36 - 15 - 10 - 3 + 1 = 9.$$

O con f.g.: coeficiente de x^7 en

$$(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^2+x^5)$$

$$= (1-x^3)(1-x^4)(1-x^6)(1-x)^{-3}$$

coeficiente de x^7 de

$$(1 - x^3 - x^4 - x^6 + x^7) \sum_{n=0}^{\infty} CR_n^3 x^n$$

que es $CR_7^3 - CR_4^3 - CR_3^3 - CR_1^3 + -CR_0^3$, cuyo calculo ya hicimos.

Ejercicios de Desarrollo

Ejercicio de Desarrollo 1: Un juego de azar con dados tiene la siguiente estructura: Se tira un dado cinco veces de forma serial y se van sumando los resultados de las tiradas. Si en una cualquiera de las cinco tiradas se llegara a sacar un 6, dicha tirada queda invalidada (no se toma el resultado) y se exige tirar el dado nuevamente, de la cual se aceptará cualquier resultado, incluso el 6. El jugador gana si y solo si el resultado final es 11. Se quiere hallar la cantidad N de formas de ganar. Por ejemplo, una forma de ganar sería la sucesión: $1, 1, 1, 3, 5$ o la sucesión $1, 1, \mathbf{6}, 1, 3, 5$ o la sucesión $1, 1, \mathbf{6}, 6, \mathbf{6}, 1, 2$.

a) (1 pto.) Dar un argumento explicando porqué N es igual al coeficiente de x^6 en la función generatriz:

$$(2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + x^5)^5.$$

b) (6 ptos.) Hallar N.

Resolución: a) Tirar un dado es equivalente a elegir uno de los términos $(x+x^2+x^3+x^2+x^5+x^6)$, pero como al salir 6 tiramos de nuevo, sería equivalente a $(x+x^2+x^3+x^2+x^5+x+x^2+x^3+x^2+x^5+x^6) = (2x+2x^2+2x^3+2x^4+2x^5+x^6)$. Como se tira cinco veces y la suma de los exponentes es el puntaje, la cantidad será el coeficiente de x^{11} de $(2x+2x^2+2x^3+2x^4+2x^5+x^6)^5 = (2+2x+2x^2+2x^3+2x^4+x^5)x^5$ que es el coeficiente de x^6 en $(2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + x^5)^5$

b)

$$(2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + x^5)^5 = \left(2\frac{1-x^6}{1-x} - x^5\right)^5 = (2 - 2x^6 - x^5 + x^6)^5(1-x)^{-5} =$$

$$(2-x^5-x^6)^5\sum_{n=0}^{\infty} CR_n^5 x^n = (2^5 - 2^4 5x^5 - 2^4 5x^6 + \text{términos de orden mayor que } x^6)\sum_{n=0}^{\infty} CR_n^5 x^n$$

Para calcular $(2-x^5-x^6)^5$ podemos usar el multinomio (práctico 1) así:

$$(2-x^5-x^6)^5 = \sum_{a+b+c=5}\binom{5}{a\ b\ c}2^a(-x^5)^b(-x^6)^c$$

$$= \binom{5}{5\ 0\ 0}2^5(-x^5)^0(-x^6)^0 + \binom{5}{4\ 1\ 0}2^4(-x^5)^1(-x^6)^0 + \binom{5}{4\ 0\ 1}2^4(-x^5)^0(-x^6)^1 + O(x^6)$$
$$= 2^5 + 5\cdot 2^4(-x^5) + 5\cdot 2^4(-x^6)$$

cuyo coeficiente en x^6 es $2^5 CR_6^5 - 5\cdot 2^4 CR_1^5 - 5\cdot 2^4 CR_0^5 = 2^5 C_4^{10} - 5\cdot 2^4\cdot 5 - 5\cdot 2^4\cdot 1 = 32\cdot 10\cdot 3\cdot 7 - 80\cdot 6 = 480\cdot(2\cdot 7-1) = = 480\cdot 13 = 6\,240$.

Ejercicio de Desarrollo 2:

a)(3 ptos.) Demostrar la fórmula de Stifel:

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}.$$

b)(5 ptos.) Demostrar por inducción en m la fórmula del binomio:

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}x^n,$$

donde asumimos que $x^0 = 1$ por definición. **Resolución**: a) Argumento combinatorio: Todas las maneras de elegir n objetos de entre m, podemos distinguir aquellas que eligen entre sus elementos al primero de todos o no lo eligen. La formas de elegir n incluyendo el primero son $\binom{n-1}{n-1}$, mientras que las maneras de elegir n sin el primero son $\binom{n-1}{n}$. Por la regla de la suma sale la igualdad.

Argumento algebraico:

$$\binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1} = \frac{(m-1)!}{n!(m-1-n)!} + \frac{(m-1)!}{(n-1)!(m-1-(n-1))!}$$

$$= (m-1)!\left(\frac{1}{n!(m-n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!(m-n))!}\right) = (m-1)!\frac{(m-n)+n}{n!(m-n)!} = (m-1)!\frac{m}{n!(m-n)!}$$
$$= \frac{(m-1)!m}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{n}$$

b) Caso base $(1+x)^0=1$ y $\sum_{n=0}^{0}\binom{m}{n}x^n=\binom{m}{0}x^0=1$ Paso inductivo:

$$(1+x)^{m+1}=(1+x)(1+x)^m \underset{HI}{=} (1+x)\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}x^n=\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}x^n+x\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}x^n=\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}x^n+\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}x^{n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}x^n+\sum_{n=1}^{m+1}\binom{m}{n-1}x^n=\binom{m}{0}x^0+\sum_{n=1}^{m}\binom{m}{n}x^n+\binom{m}{m}x^{m+1}+t\sum_{n=1}^{m}\binom{m}{n-1}x^n$$

$$=1+x^{m+1}+\sum_{n=1}^{m}\left(\binom{m}{n}+\binom{m}{n-1}\right)x^n \underset{a)}{=} \binom{m+1}{0}x^0+\binom{m+1}{m+1}x^{m+1}+\sum_{n=1}^{m}\binom{m+1}{n}x^n=\sum_{n=0}^{m+1}\binom{m+1}{n}x^n$$

Aclaraciones hechas en durante el parcial: $\mathcal{P}\{1,2,\ldots,6\}$ es el conjunto de partes de $\{1,2,\ldots,6\}$ o sea $\{S : S\subset\{1,2,\ldots,6\}\}$.

Ejercicio MO3, donde dice “no dejan dos letras juntas” debería decir “no dejan dos letras iguales juntas”.

Ejercicio MO4, “estable” significa “acotada”.

Inicialmente (no hay período), hay 20 cebollitas inmaduras, y luego del primer período, las mismas maduran. Las maduras siguen generando dos cebollitas por período.

Ejercicio MO5 en la panadería hay cada vez cinco bizcochos de cada tipo.