05 de mayo de 2016.

Soluciones del primer parcial
Matemática Discreta 1. Semestre impar 2016.

Problema de desarrollo

Probar por inducción que $\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{(4i-3)(4i+1)}) = \frac{n}{4n+1}, \quad \forall n \geq 1.$

Solución:

1. Paso base: n=1
$$\sum_{i=1}^{1}(\frac{1}{(4i-3)(4i+1)}) = \frac{1}{4+1}$$

2. Paso inductivo:
$$H_{ind} : \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{(4i-3)(4i+1)}) = \frac{n}{4n+1}$$
$$T_{ind} : \sum_{i=1}^{n+1}(\frac{1}{(4i-3)(4i+1)}) = \frac{n+1}{4(n+1)+1}$$
Demostración:
$$\sum_{i=1}^{n+1}(\frac{1}{(4i-3)(4i+1)}) = \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{(4i-3)(4i+1)}) + \frac{1}{(4(n+1)-3)(4(n+1)+1)}$$
Aplicando H_{ind} obtenemos,
$$\sum_{i=1}^{n+1}(\frac{n}{(4i-3)(4i+1)}) = \frac{n}{4n+1} + \frac{1}{(4(n+1)-3)(4(n+1)+1)}$$
$$= \frac{n}{4n+1} + \frac{1}{(4n+1)(4n+5)}$$
$$= \frac{4n^2+5n+1}{(4n+1)(4n+5)} = \frac{(4n+1)(n+1)}{(4n+1)(4n+5)} = \frac{n+1}{4n+5} = \frac{n+1}{4(n+1)+1}$$

Ejercicio

Sean A y B dos conjuntos finitos con $|A| = 4$ y $|B| = n$. Elija la opción que considere verdadera.

Solución:

La respuesta correcta es: si $n > 4$, hay $\sum_{i=0}^{n}(\binom{n}{i}(n-i)^4(-1)^i)$ funciones sobreyectivas. Se puede probar por inducción que si $m < n$, entonces $Sob(m,n) = \sum_{i=0}^{n}(\binom{n}{i}(n-i)^4(-1)^i) = 0$. Por ejemplo para n=5, queda $625 - 1280 + 810 - 160 + 5 - 0 = 0$

Ejercicio

Skipper quiere repartir n pescados entre Kowalski, Rico y Cabo según el siguiente criterio: darle al menos 10 a Rico, como máximo 2 a Cabo y un número divisible por 3 a Kowalski. ¿Cuál es la función generatriz de la cantidad de formas en que Skipper puede repartir los n pescados?

Solución:

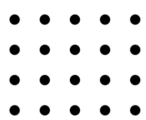
La respuesta correcta es: $f(x) = \dfrac{x^{10}}{(1-x)^2}$.

La función que genera la primer condición es $f_r(x) = \dfrac{x^{10}}{1-x} = x^{10}+x^{11}+x^{12}+...$; la que genera la segunda es $f_c(x) = \dfrac{1-x^3}{1-x} = 1 + x^1 + x^2$; y la que genera la tercera $f_k(x) = \dfrac{1}{1-x^3} = 1 + x^3 + x^6 + x^9...$

Como queremos que se cumplan las 3 condiciones a la vez $f(x) = f_r(x).f_c(x).f_k(x)$. Luego, $f(x) = (\dfrac{x^{10}}{1-x})(\dfrac{1-x^3}{1-x})(\dfrac{1}{1-x^3}) = \dfrac{x^{10}}{(1-x)^2}$

Ejercicio

La figura muestra un arreglo de puntos de 4×5, cada uno del cual se encuentra a 1 unidad de distancia de su vecino más cercano. Determine el número de triángulos no degenerados (es decir, con área positiva) cuyos vértices son puntos del arreglo dado.



(A) 256 (B) 746 (C) 1140 (D) 1056 (E) 986

Solución:

La respuesta correcta es: 1056.

Hay $C_3^{20} = 1140$ maneras de escoger tres puntos, pero no todas estas tripletas son triángulos no degenerados. Necesitamos encontrar cuantas tripletas son colineales.

Consideramos cinco casos posibles de tripletas colineales: horizontales, verticales y diagonales. La respuesta correcta es $1140 - (40 + 36 + 8) = 1056$.

Ejercicio

El profesor de Matemática Discreta desea sacar una foto de los 5 estudiantes varones y las 9 estudiantes mujeres que hay ese día en la clase. Él quiere que los varones estén en orden decreciente de acuerdo a su estatura (asumiendo que todos tienen estaturas distintas) de izquierda a derecha y las mujeres en orden creciente de acuerdo a su estatura (asumiendo que todas tienen estaturas distintas) de izquierda a derecha. ¿De cuántas maneras puede hacerse esto? (Los varones no tienen que estar juntos y las mujeres tampoco tienen que estar juntas).

(A) 2002 (B) 2008 (C) 2016 (D) 2020 (E) 1287

Solución:

La respuesta correcta es: 2002.

Suponga que hay 14 espacios vacíos en una fila. Luego, hay $C_5^{14} = 2002$ maneras de escoger 5 espacios (donde se ubicaran los varones, de manera única). Una vez ubicados los varones, las mujeres solo tienen una manera de ubicarse en los 9 espacios restantes. Así, la respuesta es 2002.

Ejercicio

En un grupo de 100 estudiantes hay 50 que ven Game of Thrones(G) y The Walking Dead(T), 40 que ven G y Breaking Bad(B), 20 que ven T y B, y 15 que ven G, T y B. ¿Cuántos ven exactamente dos series?
Solución:

La respuesta correcta es: 65.

$N(GT) + N(GB) + N(BT) = N(soloGT) + N(\text{solo GB}) + N(\text{solo BT}) + 3N(GBT)$. Si tenemos en cuenta $N(\text{solo ven 2 series}) = N(\text{solo GT}) + N(\text{solo GB}) + N(\text{solo BT})$ y sustituimos por los datos del problema vemos que: $50 + 40 + 20 = N(\text{solo ven 2 series}) + 45$, y por lo tanto $N(\text{solo ven 2 series}) = 65$.

Ejercicio

Resuelva la siguiente relación de recurrencia:
$a_{n+2}^2 - 5a_{n+1}^2 + 6a_n^2 = 7n, \quad n \geq 0$
donde $a_0 = a_1 = 1$. *Sugerencia: haga un cambio de variable.*

Solución:

Hacemos el cambio $b_n = a_n^2$. Luego, la relación es equivalente a $b_{n+2} - 5b_{n+1} + 6b_n = 7n, \quad n \geq 0$ con condiciones iniciales $b_0 = b_1 = 1$.

Homogénea:

$b_{n+2} - 5b_{n+1} + 6b_n = 0$. Ecuación característica: $r^2 - 5n + 6 = 0$. Factorizando, $(r-3)(r-2) = 0$, de donde $r_1 = 3$ y $r_2 = 2$. Así, $b_n^{(h)} = C_1 3^n + C_2 2^n$.

Particular:

La solución particular de la no homogénea se busca dentro de la familia de funciones de $7n$, es decir, dentro de los polinomios de primer grado. Proponemos $b_n^{(p)} = An + B$. Sustituyendo en la relación de recurrencia,

$$A(n+2) + B - 5[A(n+1) + B] + 6(An + B) = 7n$$
$$2An - 3A + 2B = 7n$$

Igualando $2A = 7$, $-3A + 2B = 0$, se tiene que $A = 7/2$ y $B = 21/4$. Luego, $b_n^{(p)} = \frac{7}{2}n + \frac{21}{4}$.

La solución general queda,

$$b_n = C_1 3^n + C_2 2^n + \frac{7}{2}n + \frac{21}{4}$$

.
Como $b_0 = b_1 = 1$, se tiene que $C_1 + C_2 = \frac{-17}{4}$ y $3C_1 + 2C_2 = \frac{-31}{4}$, de donde $C_1 = 3/4$ y $C_2 = -5$.

Luego,

$$b_n = \frac{3}{4} \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n + \frac{7}{2}n + \frac{21}{4}.$$

Por lo tanto,

$$a_n = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n + \frac{7}{2}n + \frac{21}{4}}$$

.
Note que la cantidad subradical es positiva para todo $n \geq 0$ y que $a_0 = a_1 = 1$.