30 de setiembre de 2015

Soluciones del primer parcial Matemática Discreta 1. Semestre par 2015.

Problema de desarrollo

Considerar la desigualdad: $n\sqrt{n} \geq 2\sqrt{n^2+4}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Hallar el menor natural para el cual la desigualdad es válida.
2. Demostrar por inducción completa la desigualdad, a partir de la base inductiva hallada en la parte anterior.

Solución:

1. Basta comprobar que $n = 5$ verifica la desigualdad pero $n = 4$ no.
2. Queremos probar que $n\sqrt{n} \geq 2\sqrt{n^2+4}$, para todo $n \geq 5$. Obsérvese que todos los elementos involucrados son positivos, y por lo tanto $n\sqrt{n} \geq 2\sqrt{n^2+4}$ si y solo si $n^3 \geq 4(n^2+4)$. Luego $n^3 \geq 4(n^2+4) \Leftrightarrow n^3-4n^2-16 \geq 0$. O sea que queremos probar $n^3 - 4n^2 - 16 \geq 0$, para todo $n \geq 5$.

   Base inductiva: $n = 5$ pues $5^3 - 45^2 - 16 = 9 \geq 0$.
   Hipótesis de inducción: $n^3 - 4n^2 - 16 \geq 0$.
   Tesis: $(n+1)^3 - 4(n+1)^2 - 16 \geq 0$.
   Desarrollando se tiene que $(n+1)^3-4(n+1)^2-16 \geq 0 \Leftrightarrow (n^3-4n^2-16)+(3n^2-5n-3) \geq 0$. Para verificar esta desigualdad es suficiente mostrar que el segundo paréntesis es no negativo, pues el primer paréntesis es no negativo, para todo $n \geq 5$, por la hipótesis de inducción. O sea es suficiente mostrar que $3n^2 - 5n - 3 \geq 0$, para todo $n \geq 5$. Esto último es fácil de comprobar pues se hace el signo de la función $f(x) = 3x^2 - 5x - 3$ y se comprueba que es positiva para $x \geq 5$.

Ejercicio

Sea $\mathcal{F} = \{\ f : \{0,1,2,3,4\} \to \{0,1,2,3,4\}$ sobreyectiva / $f(i) \neq i, \forall i \in \{2,3,4\}\ \}$. Calcular el cardinal de $\mathcal{F}$.

Ofrecemos a continuación dos posibles soluciones del ejercicio.

Solución I:

Obsérvese para comenzar que una función $f : \{0,1,2,3,4\} \to \{0,1,2,3,4\}$ es sobreyectiva si y solamente si es biyectiva. Por Inclusión-Exclusión, sea c_1 la condición de aquellas funciones que dejan fijo al 2, c_2 las que dejan fijo al 3 y c_3 las que dejan fijo al 4. Sea $N(c_i)$ la cantidad de funciones que cumplen la condición c_i. Estamos interesados en hallar $N(\overline{c_1 c_2 c_3})$.

Denotemos por S el universo. Luego, S es la totalidad de funciones sobreyectivas, es decir, $S = 5!$. Si S_1 denota la cantidad de funciones que satisfacen una de las condiciones, entonces $S_1 = 3N(c_i) = 3 \times 4! = 72$. Si S_2 denota la cantidad de funciones que satisfacen dos de las condiciones, entonces

$S_2 = \binom{3}{2} N(c_i c_j) = 3 \times 3! = 18$. Si S_3 denota la cantidad de funciones que satisfacen las 3 condiciones, entonces $S_2 = \binom{3}{3} N(c_1 c_2 c_3) = 1 \times 2! = 2$.

Luego se tiene: $N(\overline{c_1 c_2 c_3}) = S - S_1 + S_2 - S_3 = 64$.

Solución II:
Obsérvese para comenzar que una función $f : \{0, 1, 2, 3, 4\} \to \{0, 1, 2, 3, 4\}$ es sobreyectiva si y solamente si es biyectiva. Éstas en total son 5!. Las funciones que desordenan todos los números son en total $\mathrm{D}_5 = 44$. Luego contamos las funciones que dejan fijo el cero y desordenan el resto, obtenemos: $\mathrm{D}_4 = 9$. Lo mismo sucede si contamos las funciones que dejan fijo el uno y desordenan el resto, nuevamente son $\mathrm{D}_4 = 9$. Finalmente si contamos las funciones que dejan fijo el cero y el uno y desordenan el resto, obtenemos $\mathrm{D}_3 = 2$. En total, hemos contado todas las funciones que se presentan en los diferentes casos: $\mathrm{D}_5 + 2.\mathrm{D}_4 + \mathrm{D}_3 = 64$.

Ejercicio

El coeficiente de grado i del desarrollo en serie de potencias del producto de convolución

$$\Big(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{2^i}{i!} x^i\Big) * \Big(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{3^i}{i!} x^i\Big)$$

es:

(respuesta correcta): $\dfrac{5^i}{i!}$.

Solución:

Por el desarrollo en series de MacLaurin,

$$e^{ax} = \Big(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a^i}{i!} x^i\Big)$$

Luego,

$$\Big(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{2^i}{i!} x^i\Big) * \Big(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{3^i}{i!} x^i\Big) = e^{2x} e^{3x} = e^{5x}$$

Así, la pregunta equivale a hallar el coeficiente de grado i de

$$e^{5x} = \Big(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{5^i}{i!} x^i\Big)$$

que obviamente es $\dfrac{5^i}{i!}$.

Ejercicio

Sea c_n la cantidad de puntos de $\mathbb{Z}^n$ que es necesario tomar para asegurarse que existen dos de ellos tales que su punto medio también tiene coordenadas enteras. Entonces: $c_2 = 5$; $c_3 = 9$.

Solución:
Para que el punto medio de dos puntos tenga coordenadas enteras basta que las coordenadas de los dos puntos elegidos tengan la misma paridad. Por Palomar, para $\mathbb{Z}^n$ se obtiene $c_n = 2^n + 1$.

Ejercicio

Seleccionando 2 letras de RATA y 3 letras de TIERRA se forman palabras con y sin sentido. ¿Cuántas palabras contienen exactamente dos A?

Respuesta: Hay 430 palabras con exactamente dos A.

Solución:

Los pares en los que aparecen exactamente dos A son: RA-TIA, RA-TEA,RA-TRA,RA-IEA,RA-ERA,RA-IRA,RA-RRA,TA-TIA,TA-TEA,TA-TRA,TA-IEA. Permutando en los diferentes casos, atendiendo las repeticiones, obtenemos:

$$\frac{5!}{2!} \times 4 + \frac{5!}{2!3!} + 6\frac{5!}{2!2!} = 430.$$

Ejercicio

Calcular la cantidad de palabras que se pueden formar usando todas las letras de la palabra GALLETITAS que contienen el patrón LL y las vocales en su orden orginal. Respuesta: $\frac{\binom{9}{5} \times 5!}{2!}$.

Solución:
Se dejan las 4 vocales manteniendo el orden original, y quedan 5 huecos entre ellas, para colocar los 5 símbolos: G T LL T y S, por lo que hay combinaciones con repetición de 5 en 5 formas de asignar los símbolos a los huecos entre las vocales. Por cada asignación hay una única permutación, o sea 5!, y se repiten las T, por lo que se divide por 2!.

Ejercicio

Una prueba parcial consta de 7 preguntas con un total de 40 puntos. De cuántas maneras se pueden asignar valores a las preguntas, de tal manera que cada pregunta valga entre 4 y 8 puntos? Respuesta: $\binom{18}{12} - 7\binom{13}{7} + \binom{7}{2}\binom{8}{2} = 7140$.

Solución:

El problema equivale a resolver la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 40$$

tal que $4 \leq x_i \leq 8$ para $i = 1, 2, \ldots, 7$. O bien, restando 4,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 12$$

tal que $0 \leq x_i \leq 4$ para $i = 1, 2, \ldots, 7$.

Resolvemos por inclusión-exclusión. El universo tiene cardinalidad $CR^7_{12} = \binom{18}{12}$. Sea c_i aquellas soluciones tales que $x_i \geq 5$. Así, $N(c_i) = CR^7_7 = \binom{13}{7}$ y $N(c_i c_j) = CR^7_2 = \binom{8}{2}$.

La solución es entonces: $\binom{18}{12} - 7\binom{13}{7} + \binom{7}{2}\binom{8}{2} = 7140$.