Primer Parcial - Matemática Discreta I

Viernes 8 de mayo de 2015

Número de lista	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5	MO6
B	B	C	D	C	A

Cada problema de desarrollo correcto vale 8 puntos.
Cada respuesta correcta de múltiple opción suma 4 puntos. Respuestas incorrectas restan 1.
La duración del parcial es de tres horas y media.

Múltiple Opción 1

Contar los subconjuntos de 4 elementos de $S = \{1, 2, \dots, 100\}$ tales que la distancia entre toda pareja de elementos sea de 3 o más. Opciones: A) $\binom{94}{3}$; B) $\binom{94}{4}$; C) $\binom{94}{5}$; D) $\binom{94}{6}$.

Solución MO1

Si $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ cumple con el enunciado y se ordenan sus elementos en forma creciente entonces $x_i = a_{i+1} - a_i \geq 3$, $i = 1, 2, 3$. Definiendo $x_0 = a_1 \geq 1$ y $x_4 = 100 - a_4$ tenemos que $\sum_{i=0}^{4} x_i = 100$. Usando las variables $y_i = x_i - 3$, $i = 1, 2, 3$, $y_0 = x_0 - 1$, $y_4 = x_4$, debemos contar la cantidad de soluciones naturales de $\sum_{i=0}^{4} y_i = 90$, que es $CR_{90}^{5} = \binom{5+90-1}{90} = \binom{94}{90} = \binom{94}{4}$.

Múltiple Opción 2

Hallar la cantidad de palabras usando todas las letras de la palabra CARACOL, que no tenga letras iguales consecutivas. Opciones: A) 650; B) 660; C) 670; D) 680.

Solución MO2

Se aplica el Principio de Inclusión y Exclusión, considerando el universo de todas las palabras que usan las letras de la palabra CARACOL y las condiciones c_A: las letras A están juntas, y c_C: las letras C están juntas. Luego $n(\overline{c_A}, \overline{c_C}) = \frac{7!}{2!2!} - 2 \times \frac{6!}{2!} + 5! = 660$.

Múltiple Opción 3

Hallar el menor entero positivo n para el cual no es posible entregar 100 caramelos a n niños de modo que todos reciban distintas cantidades. Se asume que no es posible partir caramelos, y que todo niño recibe al menos un caramelo. Opciones: A) 12; B) 13; C) 14; D) 15.

Solución MO3

Sea A el conjunto de n enteros positivos no mayores que 100, que consta de las cantidades de caramelos que se le reparte a cada niño. Está claro que la suma de los elementos de A es nunca menor que los primeros n enteros positivos $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Luego, tenemos que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \leq 100$, siendo $n = 14$ el menor entero positivo que no satisface esa desigualdad. Un razonamiento análogo lleva a la solución partiendo de 14 palomas y el conjunto $\{1, 2, \dots, 13\}$ como palomares.

Múltiple Opción 4

Sea $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión tal que $F_0 = F_1 = 1$, y $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
Contar la cantidad c_{100} de palabras binarias de largo 100 que no tienen una racha de la forma 011. Opciones: A) $c_{100} = F_{100} + 1$; B) $c_{100} = F_{100} - 1$; C) $c_{100} = F_{100} + F_{101}$; D) $c_{100} = F_{100} + F_{101} - 1$.

Solución MO4

Dentro de las palabras c_n de largo n que no tienen la racha 011, sea a_n todas aquellas que terminan en 0, b_n las que terminan en 01 y d_n las que terminan en 11. Es claro que $a_n = c_{n-1}$, $b_n = c_{n-2}$ y que hay una única palabra que termina en 11 que no tiene la racha 011 (la $1 \cdots 1$). Luego $c_n = c_{n-1} + c_{n-2} + 1$. Resolviendo esta recurrencia no homogénea con datos iniciales $c_1 = 2, c_2 = 4$ se tiene que $c_n = F_{n+2} - 1$, y por lo tanto $c_{100} = F_{102} - 1 = F_{100} + F_{101} - 1$.

Múltiple Opción 5

Hallar la cantidad de distribuciones de 6 pelotitas diferentes en 3 recipientes diferentes, de modo que cada recipiente tenga al menos una pelotita. Opciones: A) 500; B) 520; C) 540; D) 560.

Solución MO5

Por el principio de biyección, el conteo se corresponde con el de funciones sobreyectivas de 6 en 3, y $Sob(6,3) = 3^6 - \binom{3}{1} \times (3-1)^6 + \binom{3}{2}(3-2)^6 = 540$.

Múltiple Opción 6

Sea $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la convolución entre las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dadas por $a_n = n$ y $b_n = 2^n$. Si $c(x)$ es la función generatriz de $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ entonces:
A) $c(x) = \frac{x}{(1-2x)(1-x)^2}$; B) $c(x) = \frac{x}{(1+2x)(1-x)^2}$; C) $c(x) = \frac{x(x+1)}{(1-2x)(1-x)^2}$; D) $c(x) = \frac{x+1}{(1-2x)(1-x)^2}$.

Solución MO6

Sabemos que $c(x) = a(x)b(x)$. Por la serie geométrica tenemos que $b(x) = 1/(1-2x)$. Calculemos $a(x)$:

$$a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)' = x \left(\frac{1}{1-x} \right)' = x/(1-x)^2.$$

Problema 1

Probar que $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ para todo natural n, mediante el Principio de Inducción Completa sobre los números naturales.

Solución al problema 1

El paso base es cierto pues:

$$\frac{0^2(0+1)^2}{4} = 0 = 0^3 = \sum_{i=0}^{0} i^3.$$

Para probar el paso inductivo, supongamos que el enunciado es cierto para cierto natural h. Entonces:

$$\sum_{i=0}^{h+1} i^3 = \sum_{i=0}^{h} i^3 + (h+1)^3 = \frac{h^2(h+1)^2}{4} + (h+1)^3 = (h+1)^2(h^2+4h+4)/4 = \frac{(h+1)^2(h+2)^2}{4},$$

donde se ha utilizado el paso inductivo en la segunda igualdad. Luego el paso inductivo también es cierto, y aplicando el Principio de Inducción Completa tenemos que la igualdad del enunciado es válida para todo natural n.

Problema 2

Hallar la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que verifica $a_0 = a_1 = 1$ y $a_{n+2} - a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} a_i$.

Solución al problema 2

Calculando algunos valores de a_n, como $a_1 = 0, a_2 = 2, a_3 = 4$ y $a_4 = 8$, podemos intuir que $a_n = 2^{n-1}$ para todo $n \geq 1$, lo cual se demuestra directamente mediante el Principio de Inducción Completa.