Matemática Discreta I (2014)
Solución del primer parcial

Ejercicio 1. Calcule la cantidad de palabras que se pueden formar permutando las letras de la palabra (sin tilde):

MATEMATICA

y que verifiquen simultáneamente las siguientes tres condiciones:

i. Comienzan en M.
ii. Terminan en A.
iii. Contienen la palabra TIC en alguna parte.

Solución. Debemos considerar las disposiciones de

$$\mathtt{M}\ \boxed{\mathtt{A}}\ \boxed{\mathtt{T}}\ \boxed{\mathtt{E}}\ \boxed{\mathtt{M}}\ \boxed{\mathtt{A}}\ \boxed{\mathtt{TIC}}\ \mathtt{A}$$

donde la primera `M` y la última `A` están fijas, y la palabra $\boxed{\mathtt{TIC}}$ debe considerarse como un solo símbolo. Entonces hay 6 símbolos para disponer, donde la $\boxed{\mathrm{A}}$ aparece 2 veces.

Por lo tanto, la solución es $6!/2! = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360$.

Ejercicio 2. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir catorce bolas blancas idénticas en cinco recipientes distintos de modo que ningún recipiente quede vacío?

Solución. Primero colocamos una bola blanca en cada recipiente para asegurar que ninguno quede vacío. Nos queda distribuir las 9 bolas restantes en los 5 recipientes; es decir las combinaciones de 5 (recipientes) tomadas de a 9 (bolas).

La solución es $\mathrm{CR}_9^5 = \mathrm{C}_9^{13}$.

Ejercicio 3. Halle el coeficiente en x^{11} de $\frac{x^6}{(1+x)(1-x)^2}$.

Solución. Es equivalente a hallar el coeficiente de x^5 en $\frac{1}{(1+x)(1-x)^2}$.

Haciendo fracciones simples se obtiene que

$$\frac{1}{(1+x)(1-x)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} .$$

El coeficiente de x^5 en $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1-x}$ y $\frac{1}{(1-x)^2}$ es 1, -1 y 6, respectivamente.

Por lo tanto la solución es $\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$.

Solución (alternativa). Esta solución requiere más ingenio pero evita determinar las fracciones simples. Observar que

$$\frac{1}{(1+x)(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x^2)} \cdot \frac{1}{1-x} = \left(1+x^2+x^4+\dots\right)\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\dots\right) .$$

En la última expresión se aprecia que el coeficiente de x^5 es 3.

Ejercicio 4. Sea A un subconjunto de n elementos distintos del conjunto

$$\{1, 2, 3, \dots, 48, 49, 50\}.$$

¿Cuál es el menor n que garantiza que existen dos elementos distintos de A que suman 42?

Solución. Se hacen 20 nidos correspondientes a todas las parejas de elementos distintos en el conjunto que suman 42 (desde $1+41$ hasta $20+22$). Los números no utilizados se colocan en 10 nidos individuales; en total tenemos 30 nidos:

$$\underbrace{}_{\{1,41\}}, \underbrace{}_{\{2,40\}}, \dots, \underbrace{}_{\{19,23\}}, \underbrace{}_{\{20,22\}}, \underbrace{}_{\{21\}}, \underbrace{}_{\{42\}}, \dots, \underbrace{}_{\{49\}}, \underbrace{}_{\{50\}}.$$

Luego si se eligen al menos 31 elementos distintos del conjunto, se puede asegurar por el principio del palomar que al menos dos de ellos caen en el mismo nido. Necesariamente será un nido de dos elementos, que suman 42, de modo que se puede asegurar que al menos dos de ellos suman 42. Por otra parte, si solamente se eligen 30 elementos, podría tomarse uno en cada nido y ningún par de elementos sumaría 42.

En conclusión el mínimo número de elementos debe tener A para asegurarse de que haya dos de ellos que sumen 42 es 31.

Ejercicio 5. Halle la función generatriz de la sucesión definida por $a_0 = 0$ y $a_n = 1/n$ para todo $n \geq 1$.

Solución. Consideramos la derivada de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$. Derivando término a término tenemos

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\ .$$

Por lo tanto $f(x)$ es una primitiva de $\frac{1}{1-x}$, que además cumple $f(0) = a_0 = 0$.

Entonces la solución es $f(x) = -\ln(1-x)$.

Ejercicio 6. Halle el término general de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:

i. $a_0 = a_1 = 1$.
ii. $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n \quad (n \geq 0)$.

Solución. La ecuación característica es $r^2 = 2r + 3$, que tiene raíces $r = 3$ y $r = -1$. Por lo tanto la solución general a la ecuación (ii) es

$$c_1\, 3^n + c_2\, (-1)^n\ .$$

Ahora consideramos las condiciones iniciales

$$a_0 = c_1 + c_2 = 1 \qquad \text{y} \qquad a_1 = 3c_1 - c_2 = 1\ .$$

Resolviendo el sistema tenemos $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, y por lo tanto la solución es $a_n = \frac{3^n + (-1)^n}{2}$.

Ejercicio 7. Halle la cantidad de palabras de largo $n \geq 1$ sobre el alfabeto $\{\mathrm{A}, \mathrm{E}, \mathrm{I}, \mathrm{O}, \mathrm{U}\}$ que no contienen dos ocurrencias consecutivas de la misma letra, y que contienen al menos una A.

Solución. Sin tomar en cuenta la última restricción, la cantidad de palabras de largo n sin ocurrencias consecutivas de la misma letra es $5 \cdot 4^{n-1}$, ya que hay cinco opciones para la primera letra, y cuatro opciones para la segunda, tercera, etc.

De estas tenemos que distinguir las que no contienen ninguna A de las que contienen al menos una A. Resulta más fácil contar las que no contienen ninguna A: en efecto, la cantidad es $4 \cdot 3^{n-1}$ ya que hay cuatro opciones para la primera letra (E, I, O, U) y tres para la segunda, tercera, etc.

Entonces la cantidad de palabras que contienen al menos una A es $5 \cdot 4^{n-1} - 4 \cdot 3^{n-1}$.

Ejercicio 8. Demuestre por inducción completa que para todo entero $n \geq 0$ se cumple la siguiente identidad:

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

Solución. Por inducción en n.

Paso base: $n = 0$. Ambos lados de la identidad son 0 en este caso.

$$\text{Paso inductivo: } \begin{cases} \text{Hipótesis inductiva: } \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2), \\ \text{Tesis inductiva: } \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) = \frac{1}{3} (n+1)(n+2)(n+3). \end{cases}$$

Descomponemos el lado izquierdo en la tesis del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) &= \left(\sum_{k=0}^{n} k(k+1) \right) + (n+1)(n+2) \\ &= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos utilizado la hipótesis inductiva.

Ahora desarrollamos la expresión:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) &= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} \\ &= \frac{(n+3)(n+1)(n+2)}{3} \\ &= \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3), \end{aligned}$$

que es el lado derecho en la tesis, con lo cual hemos demostrado la tesis inductiva.

Habiendo probado el paso base y el paso inductivo, queda demostrada la identidad por el principio de inducción completa.