Examen 26/2/2021 (virtual)

1. Sea N la cantidad de funciones inyectivas $f:\{1,2,\ldots,11\}\to\{1,2,\ldots,13\}$ tales que $f(x)+x$ es impar para todo $x\in\{1,2,\ldots,11\}$ y sea $F=6!/2!$

   Entonces $\frac{N}{F^2}=$ ______.

   Pista: No calcule el valor de F^2, encuentre mejor una expresión producto para N y luego simplifique términos en la expresión $\frac{N}{F^2}$ (observe que F en el denominador aparece elevado al cuadrado).

2. Sean (b_n) y (c_n) dos sucesiones que verifican $c_n=\sum_{k=0}^{n}2^k b_{n-k}$ para todo $n\geq 0$.

   Se sabe que la función generatriz $C(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ viene dada por $C(x)=\frac{1}{(1-2x)(1-x)^3}$.

   Entonces $b_{100}=$ ______.

3. Una relación R en el conjunto A={1,2,3,4} se dice que es *admisible* si la matriz booleana (matriz cero-uno) asociada a la relación es de la forma:

   $\mathcal{M}(R)=\begin{pmatrix} M & N \\ N & M\end{pmatrix}$ donde M y N son matrices cuadradas 2×2.

   Existen exactamente ______ relaciones admisibles, de las cuales:

   ______ son simultáneamente simétricas e irreflexivas;

   ______ son simultáneamente antisimétricas y reflexivas.

4. Decimos que una relación de orden en $A=\{1,2,\ldots,7\}$ es *regular* si verifica (todas) las siguientes condiciones:

   - 7 es un elemento máximo de A;
   - 1, 2 y 3 son los únicos elementos minimales;
   - No existe una cadena con 4 elementos;
   - Existen exactamente 3 cadenas de largo 3 que pasan por el elemento 6.

   Entonces existen exactamente ______ ordenes regulares en A, de los cuales ______ son retículos.

5. Sean $I=\{1,2,\ldots,11\}$ y $J=\{1,2,\ldots,5\}$.

   Denotamos por $\mathcal{A}=\{X: X\subseteq I\}$ al conjunto potencia de I (i.e. el conjunto de todos los subconjuntos de I).

   Consideramos en $\mathcal{A}$ la relación de equivalencia $X\sim Y$ si $X\cap J=Y\cap J$.

   Entonces el cardinal del conjunto cociente $A/\sim$ es ______.

   La clase de equivalencia de $X=\{1,3,8\}$ tiene ______ elementos.

6. Se define el grafo cuadrícula $Q_{m,n}$ con m,n enteros positivos de la siguiente forma:

   Considere una cuadrícula m x n. Los vértices de $Q_{m,n}$ serán los centros de los cuadraditos que componen la cuadrícula y conectamos 2 de esos centros por una arista si los cuadraditos correspondientes tienen un lado en común.

   Complete las siguientes afirmaciones:

   El mínimo número de aristas que debemos quitarle a $Q_{3,3}$ de forma que el grafo resultante posea un circuito euleriano es ______.

   El mínimo número de aristas que debemos quitarle a $Q_{16,14}$ de forma que el grafo resultante posea un circuito euleriano es ______.

   Existen ______ valores de $n: 1\leq n\leq 17$ para los cuales el grafo $Q_{3,n}$ posee ciclo hamiltoniano.

   Aclaraciones:

   1. Circuito euleriano es un circuito que pasa por todas las aristas del grafo (el cual no tiene porque ser necesariamente conexo).
   2. Una cuadrícula m x n es un arreglo rectangular de cuadraditos unitarios, con m filas de cuadraditos y n columnas de cuadraditos.

7\.

Sea G un grafo plano simple conexo con 35 vértices de los cuales 6 son de grado 3, 25 son de grado 4 y 4 son de grado 6.
Se sabe que una representación plana todas las regiones tienen grado 3 o 4.

Entonces el número de regiones es ______ de las cuales

______ son de grado 3

______ son de grado 4.

8\. Se incluyen las 10 preguntas que se utilizaron en este ejercicio.
Cada prueba tenía un subconjunto de 4 preguntas de las de abajo (o con modificaciones menores) y la indicación era seleccionar cuáles eran verdaderas.

Seleccionar todas las opciones verdaderas.

- ○ 1. Existe un grafo con 1000 vértices que posee un ciclo hamiltoniano pero no un circuito euleriano.
- ○ 2. Si un grafo G posee un subgrafo homeomorfo a $K_{4,4}$ entonces no es plano.
- ○ 3. Sea H un subgrafo recubridor conexo de un grafo G. Si G no es plano entonces H tampoco lo será.
- ○ 4. Si un grafo conexo G posee exactamente 2 vértices de grado impar entonces existe una arista e tal que G-e posee un circuito euleriano.
- ○ 5. Si un grafo plano verifica la fórmula de Euler v-e+r=2 entonces es conexo.
- ○ 6. Si G no es plano entonces su complemento si lo es.
- ○ 7. Si dos grafos son homeomorfos y tienen la misma cantidad de vértices y la misma cantidad de aristas entonces son el mismo o isomorfos.
- ○ 8. Si un grafo G posee un recorrido euleriano entonces G es conexo o posee vértices aislados.
- ○ 9. Si un grafo G plano conexo tiene la misma cantidad de vértices que de aristas entonces posee un ciclo.
- ○ 10. Sea H un subgrafo recubridor conexo de un grafo G. Si H es conexo entonces G también lo será.