Ej 1. • Si x es impar $\Longrightarrow$ $f(x)+x$ impar $\Longleftrightarrow$ $f(x)$ par

• Si x es par $\Longrightarrow$ $f(x)+x$ impar $\Longleftrightarrow$ $f(x)$ impar

Las funciones a contar están en biyección con los pares de funciones (f_1, f_2) donde:

- $f_1 : \underbrace{\{1,3,\dots,11\}}_{6} \longrightarrow \underbrace{\{2,4,\dots,12\}}_{6}$ inyectiva
- $f_2 : \underbrace{\{2,4,\dots,10\}}_{5} \longrightarrow \underbrace{\{1,3,\dots,13\}}_{7}$ inyectiva

El número de tales pares es $N = P(6,6) \cdot P(7,5) = 6! \cdot \frac{7!}{2!}$

$F = \frac{6!}{2!} \Longrightarrow \boxed{\frac{N}{F^2} = 7 \cdot 2 = 14}$

Ej 2. $c_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k \cdot b_{n-k}$. Sea $a_n = 2^n \ \forall n \geq 0$.

Entonces $(c_n) = (a_n) * (b_n) \Longrightarrow$ Si llamamos $A(x)$ a la función generatriz de (a_n) se tendrá que $C(x) = A(x) \cdot B(x)$.

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k = \frac{1}{1-2x} \Longrightarrow \frac{1}{(1-2x)(1-x)^3} = \frac{1}{1-2x} \cdot B(x)$$

$$\Longrightarrow B(x) = \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} CR^3_k \cdot x^k$$

Por lo tanto $b_{100} = CR^3_{100} = \binom{3+100-1}{100} = \binom{102}{100} = \binom{102}{2} = \frac{102 \cdot 101}{2} = \boxed{5151}$

Ej 3. 1. $\underset{\text{Elecciones de } M}{2^4} \cdot \underset{\text{Elecciones de } N}{2^4} = 2^8 = \boxed{256}$

2. Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \Rightarrow M(R) = \begin{pmatrix} a & b & e & f \\ c & d & g & h \\ e & f & a & b \\ g & h & c & d \end{pmatrix}$

R simétrica $\Leftrightarrow b=c,\ f=g$
R irreflexiva $\Leftrightarrow a=d=0$

Hay libertad para elegir b, f, e, h lo cual determina $M(R)$.

$\Rightarrow$ Hay $\boxed{2^4=16}$ tales relaciones.

3.

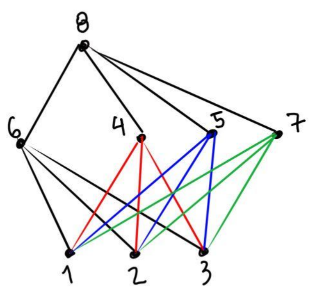
R antisimétrica $\Leftrightarrow b \cdot c = 0,\ e=0,\ f \cdot g = 0,\ h=0$
R reflexiva $\Leftrightarrow a=d=1$

Se pueden elegir b, c, f, g de manera que $b \cdot c = 0$ y $f \cdot g = 0$.

$\Rightarrow$ Hay 3 posibilidades para (b,c) $\big((0,0), (0,1), (1,0)\big)$ y 3 posibilidades para (f,g).

Por lo tanto el número de relaciones R es $3 \times 3 = \boxed{9.}$

Ej 4. 1. Un orden con las condiciones planteadas deberá tener un diagrama de Hasse con 3 niveles y el siguiente esqueleto



Las aristas negran tienen que estar seguro.

De las rojas tiene que haber al menos una y lo mismo sucede con las azules y las verdes.

Hay $(2^3-1)\cdot(2^3-1)\cdot(2^3-1) = 7^3 = \boxed{343 \text{ posibles órdenes.}}$

Se descarta que no aparezca ninguna arista

2. Dado que hay 3 elementos minimales no hay ningún orden con las condiciones dadas que sea retículo. La respuesta es $\boxed{0.}$

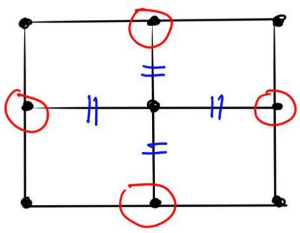
Ej 5. 1. La cantidad de clases de equivalencia coincide con la cantidad de intersecciones posibles $X \cap J$ al variar X entre los subconjuntos de I. Este número coincide con el cardinal de $\mathcal{P}(J)$, el conjunto potencia de J, que tiene $2^{|J|} = 2^5 = \boxed{32}$ elementos.

2. $\{1,3,8\} \cap J = \{1,3\}$. Los posibles $Y \subset I$ tales que $Y \cap J = \{1,3\}$ se generan agregando (o no) elementos del conjunto $\underbrace{\{6,7,8,\dots,11\}}_{6}$.

La clase de equivalencia tiene entonces $\boxed{2^6 \text{ elementos.}}$

Ej 6. 1.

$Q_{3,3}$

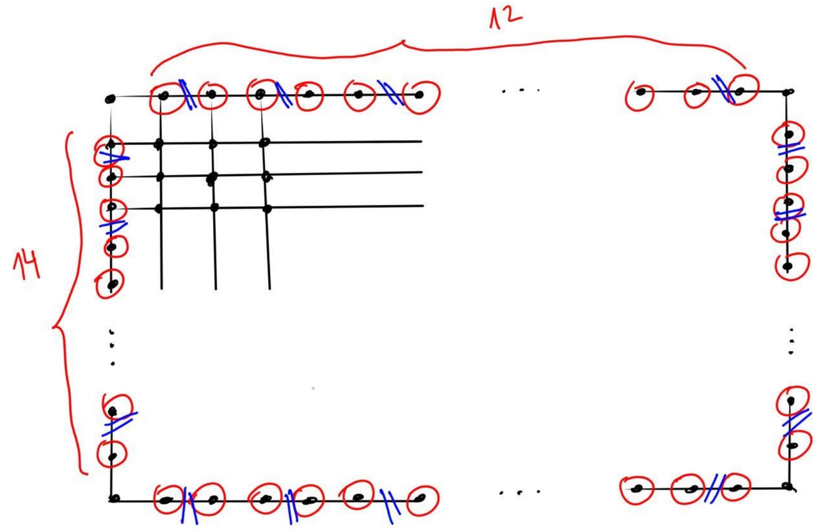


Hay 4 vértices de grado impar y ninguno de ellos se conectan entre sí.
$\Rightarrow$ Mínimo número posible de aristas a retirar para que todos los vértices queden con grado par es ≥ 4.

En azul se indican 4 aristas tales que al retirarlas el grafo tiene circuito euleriano.
Por lo tanto la respuesta es $\boxed{4.}$

2.

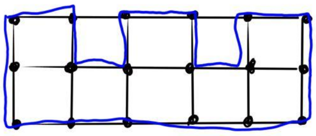
$Q_{16,14}$



En rojo se marcan los vértices de grado impar, que son un total de $2\cdot(12+14)$.
Al retirar una arista máximo va a afectar a 2 de estos vértices $\Rightarrow$ mínimo número de aristas a retirar para obtener un circuito euleriano es $\geq \dfrac{2\cdot(12+14)}{2} = 26$. En azul se indica un conjunto de 26 aristas tales que al retirarlas se obtiene un grafo con circuito euleriano.
Por lo tanto la respuesta es $\boxed{26.}$

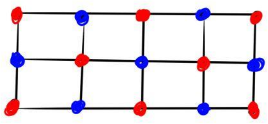
3. • Cuando n es par, $Q_{3,n}$ tiene ciclo hamiltoniano, como se puede ver en el siguiente dibujo que generaliza a cualquier $n=2k$.

$Q_{3,6}$



• Cuando n es impar, $Q_{3,n}$ no tiene ciclo hamiltoniano.
Considerando una 2-coloración como la siguiente

$Q_{3,n}$



empezando con 2 rojos en la primer columna, al haber una cantidad impar de columnas se obtiene siempre mayor número de vértices rojos que azules.
Esto impide la existencia de un ciclo hamiltoniano (que de existir debería pasar por la misma cantidad de vértices de c/ color).

Ej 7.

$$2e = \sum gr(v_i) = 6 \cdot 3 + 25 \cdot 4 + 4 \cdot 6 = 142 \longrightarrow e = 71$$

$$v - e + r = 2 \Rightarrow 35 - 71 + r = 2 \Rightarrow \boxed{r = 38}$$

Si llamamos x al número de regiones de grado 3 en una representación plena de G, entonces

$$142 = 2e = \sum gr(r_i) = x \cdot 3 + (38 - x) \cdot 4 \Rightarrow 142 = 152 - x$$

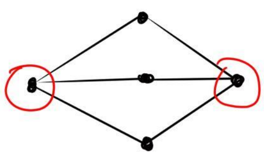
$$\Rightarrow \boxed{x = 10}$$

Regiones de $gr = 4$; $38 - x = \boxed{28}$

Ej 8.

1. V : Si G posee un subgrafo homeomorfo a $K_{4,4}$, también posee uno homeomorfo a $K_{3,3}$ (que es subgrafo de $K_{4,4}$) y por lo tanto no es pleno.

2. F : Contraejemplo

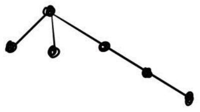


3. F: C_5 es un subgrafo recubridor conexo de K_5.
K_5 no es plano pero C_5 sí lo es.

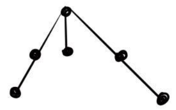
4. V: K_{1000}.

5. F: Contraejemplo

G_1



G_2



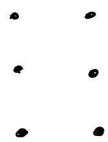
El vértice de grado 3 está conectado con 2 vértices de grado 1.

El vértice de grado 3 está conectado con 1 sólo vértice de grado 1.

$\Rightarrow$ G_1 y G_2 no son isomorfos.

6. V: Si K es el número de componentes conexas de G y G es plano se cumple que $v - e + r = K + 1$.
Como se verifica la fórmula de Euler $2 = v - e + r = K + 1$
$\Rightarrow K = 1$.

7. F: Contraejemplo

$G = \quad K_{3,3} \quad \cup$ 

8. V: Sea G un grafo con recorrido euleriano.
Si G no posee vértices aislados, todo vértice está conectado con al menos una arista. Un camino simple que recorre todas las aristas conectará a cualquier par de vértices y en consecuencia G es conexo.

9. V: $v - e + r = 2 \Rightarrow r = 2$. Por lo tanto, en cualquier representación plana de G, además de la región infinita habrá una región finita la cual debe estar delimitada por un ciclo de G.

10. <u>V</u>: Dados 2 vértices x e y de G, al ser H recubridor, x e $y \in H$ y por lo tanto existe un camino simple que los conecta en H. Siendo H subgrafo de G también será un camino en G.