**Universidad de la República** **Matemática Discreta 1**
**Facultad de Ingeniería - IMERL** **Agosto 2020**

Examen – Miércoles 12 de agosto de 2020

**Ejercicio 1.**(10 pts.) La cantidad de soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 21$ con las restricciones $-3 \leq x_i \leq 10$ para $i = 1, 2, 3$ es:

**Respuesta:** 55.

**Ejercicio 2.**(10 pts.) Para $n$ natural sea $a_n$ la cantidad de formas de pagar $n$ pesos con monedas de \$ 1 y \$ 2, donde $a_0 = 1$. Consideramos la función generatriz $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, entonces $f(x)$ es:

**Respuesta:** $\dfrac{1/2}{(1-x)^2} + \dfrac{1/4}{1-x} + \dfrac{1/4}{1+x}$.

**Ejercicio 3.**(10 pts.) Sea $(a_n)$ una sucesión de reales positivos que verifica $a_n = \sqrt{a_{n-1}^2 + 3n}$, $\forall n \geq 2$ con condición inicial $a_1 = \sqrt{273}$. Entonces $a_{20}$ vale:

**Respuesta:** 30.

**Ejercicio 4.**(10 pts.) Sea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$. Sea $N$ la cantidad de relaciones de órdenes parciales $\mathcal{R}$ sobre $A$ cuyo diagrama de Hasse consiste en una unión de 4 cadenas disjuntas de tamaño 3 y que verifican simultáneamente las siguientes tres condiciones: i) $1, 2, 3$ y 4 son elementos minimales; ii) $9, 10, 11,$ 12 son elementos maximales; iii) 1 no es menor que 12. Entonces $N$ es igual a:

**Respuesta:** 432.

**Ejercicio 5.**(10 pts.) $K_{n,m,p}$ es el grafo tripartito completo con $n+m+p$ vértices, es decir los vértices de $K_{n,m,p}$ se pueden separar en tres conjuntos disjuntos con $n$, $m$ y $p$ vértices cada uno, tal que cada vértice no sea adyacente a ningún vértice del conjunto al que pertenece y sea adyacente a todos los vértices de los otros dos conjuntos. Queremos saber para cuales $n \geq 1$ los grafos $G_n = K_{n,2n,3n}$ y $H_n = K_{n,2n,3n+1}$ admiten un ciclo hamiltoniano. Marque la opción correcta:

**Respuesta:** $G_n$ lo admite para todo $n$, pero $H_n$ nunca lo admite, independientemente del valor de $n$.

# Ejercicios de desarrollo (50 puntos)

**Ejercicio 6.**(20 puntos en total). Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los naturales incluyendo el 0.

(a)(5 pts.) Defina relación de equivalencia en un conjunto $A$.

**Sol.)** Es una relación sobre $A$ que es reflexiva, simétrica y transitiva.

(b)(5 pts.) Defina conjunto cociente $\frac{A}{\sim}$, donde $\sim$ es una relación de equivalencia sobre $A$.

**Sol.)** Para cada $a \in A$ se define su clase lateral como $[a] = \{x \in A : x \sim a\}$. El conjunto cociente $\frac{A}{\sim}$ es el conjunto de las clases laterales, es decir $\frac{A}{\sim} = \{[a] : a \in A\}$.

(c) Considere $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 5\}$ y la relación de equivalencia $(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3)$ si una se obtiene de la otra por una reordenación (por ejemplo $(1, 3, 1) \sim (3, 1, 1)$).

i) (2 pts.) Hallar $[(0, 1, 4)]$ (la clase de equivalencia del elemento $(0, 1, 4)$);

ii) (2 pts.) Hallar $[(2, 1, 2)]$ (la clase de equivalencia del elemento $(2, 1, 2)$);

iii) (2 pts.) Hallar el conjunto cociente $A/R$.

**Sol.)** $[(0, 1, 4)] = \{(0, 1, 4), (0, 4, 1), (1, 0, 4), (1, 4, 0), (4, 0, 1), (4, 1, 0)\}$; $[(2, 1, 2)] = \{(2, 1, 2), (1, 2, 2), (2, 2, 1)\}$. Como $[(0, 1, 4)] \cup [(2, 1, 2)] \neq A$, tenemos más clases laterales. Para hallarlas iremos considerendo elementos de $A$ que no se encuentren en las clases anteriores: $[(0, 2, 3)] = \{(0, 2, 3), (0, 3, 2), (2, 0, 3), (2, 3, 0), (3, 0, 2), (3, 2, 0)\}$, $[(0, 0, 5)] = \{(0, 0, 5), (0, 5, 0), (5, 0, 0)\}$, $[(1, 1, 3)] = \{(1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1)\}$ .
Observemos que la unión de esas 5 (distintas) clases de equivalencias tiene $6 + 3 + 6 + 3 + 3 = 21$ elementos y que por la fórmula de las composiciones $\#A = \binom{5+2}{2} = 21$. De ese modo podemos concluir que no hay más clases laterales y por lo tanto $\frac{A}{\sim} = \{[(0, 1, 4)], [(2, 1, 2)], [(0, 2, 3)], [(0, 0, 5)], [(1, 1, 3)]\}$.

**Sol. alternativa para iii)** Se observa que cada clase de equivalencia $[a]$ contiene a un único representante distinguido que es una tripleta ordenada $(x_1, x_2, x_3)$ con $x_1 \leq x_2 \leq x_3$. Luego basta considerar las clases $[(x_1, x_2, x_3)]$ con $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ y $x_1 + x_2 + x_3 = 5$. Con $x_1 = 0$ tenemos $(x_2, x_3) = (0, 5), (1, 4), (2, 3)$; con $x_1 = 1$ tenemos $(x_2, x_3) = (1, 3), (2, 2)$. Si $x_1 \geq 2$ entonces $x_1 + x_2 + x_3 \geq 3x_1 > 5$ lo cuál es una contradicción. Concluimos que $\frac{A}{\sim} = \{[(0, 0, 5)], [(0, 1, 4)], [(0, 2, 3)], [(1, 1, 3)], [(1, 2, 2)]\}$.

(d)(4 pts.) Determine cuántas formas hay de repartir 5 pelotitas idénticas en 3 recipientes idénticos (pueden quedar recipientes vacios).

**Sol.)** Coloquemos etiquetas a los recipientes idénticos para distinguirlos. Las formas de repartir 5 pelotitas idénticas en 3 recipientes distinguidos pueden representarse a través de una tripleta $(x_1, x_2, x_3)$ donde $x_i$ indica cuántas pelotitas contiene le recipiente $i$-ésimo, o sea, están en biyección con los elementos de $A$. Al retirar las etiquetas, dos reparticiones $x = (x_1, x_2, x_3)$ y $y = (y_1, y_2, y_3)$ serán consideradas las mismas si una resulta una permutación de la otra, es decir $x \sim y$. Luego cada clase de equivalencia estará en correspondencia con una forma de repartir 5 pelotitas idénticas en 3 recipientes idénticos; la cantidad de formas de hacerlo entonces será $\#\frac{A}{\sim} = 5$.

**Ejercicio 7.**(30 puntos en total). Para las partes (c) y (d) $G$ es un grafo **plano**, **simple**[1] (i.e. sin lazos ni aristas múltiples) y **conexo** con $v$ vértices, $e \geq 3$ aristas y **sin ciclos de largo** $\ell \leq 5$.

(a)(4 pts.) Enuncie la fórmula de Euler para grafos planos conexos.

**Sol.)** Para todo grafo plano conexo $G = (V, E)$ se tiene que $v - e + r = 2$, donde $v = |V|, e = |E|$ y r es el número de regiones delimitadas por una inmersión plana de $G$, incluyendo la región no limitada.

(b)(5 pts.) Encuentre un grafo plano simple y dos inmersiones planas del mismo, donde los grados de las regiones sean diferentes (hay un ejemplo con 5 vértices).

**Sol.)** Sea $G = (V, E)$ donde $V = \{A, B, C, D, E\}$ y $E = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, A\}, \{D, B\}, \{E, C\}\}$. Consideramos las inmesiones planas $\phi, \psi : G \to \mathbb{R}^2$ donde $\phi(A) = \psi(A) = (0, 0)$, $\phi(B) = \psi(B) = (3, 0)$, $\phi(C) = \psi(C) = (0, 3)$, $\phi(D) = \psi(D) = (4, 0)$, $\phi(E) = (1, 1)$, $\psi(E) = (0, 4)$; en ambos casos las aristas se conectan a través de un segmento de recta entre sus vértices. Ambas inmersiones tienen dos regiones (una finita y la otra infinita). En la inmersión $\phi(G)$ ambas regiones tienen grado 5, sin embargo en la inmersión $\psi(G)$ la región finita tiene grado 3 y la infinita tiene grado 7.

(c)(7 pts.) Pruebe que si una inmersión plana de $G$ determina $r$ regiones (contando la región no acotada) entonces $r \leq e/3$.

**Sol.)** Primero vamos a probar que en toda inmersión plana de $G$, toda región $\mathcal{R}$ tiene grado $\mathrm{gr}(\mathcal{R}) \geq 6$, para ello debemos considerar dos casos según el grafo sea o no acíclico. Si el grafo $G$ es acíclico, entonces $G$ es un árbol (porque es conexo por hipótesis) y por lo tanto tiene una única región de grado $2e \geq 6$ (pues por hipótesis $e \geq 3$). Si el grafo no es acíclico entonces por hipótesis, todos sus ciclos son de largo al menos 6 lo cual implica que toda región tendrá grado mayor o igual a 6. Luego aplicamos que la suma de los grados de las regiones es el doble que el número de aristas: $2e = \sum \mathrm{gr}(\mathcal{R}) \geq 6r$ por lo que $e/3 \geq r$.

(d)(7 pts.) Pruebe que $3v \geq 2e + 6$.

**Sol.)** Aplicamos la fórmula de Euler para grafos planos conexos y la desigualdad obtenida en la parte anterior: $2 = v - e + r \leq v - e + e/3 = v - \frac{2e}{3}$, multiplicando todo por 3 obtenemos: $6 \leq 3v - 2e$ de donde $2e + 6 \leq 3v$.

(e)(7 pts.) Pruebe que un grafo 3-regular[2], plano, simple y conexo posee un ciclo de largo $\ell \leq 5$.

**Sol.)** Por absurdo, suponemos que exista un grafo $G$ tal que $G$ es 3-regular, plano, simple y conexo, pero que no posea ningún ciclo de largo $\ell \leq 5$. Entonces por la parte anterior tenemos que $3v \geq 2e+6$. Como $G$ es 3-regular, entonces $3v = \sum_{x \in V} \mathrm{gr}(v) = 2e$. Juntando ambas relaciones tenemos que $2e = 3v \geq 2e + 6 \Rightarrow 0 \geq 6$ lo cual es una contradicción.

[1]Un grafo se dice simple cuando no tiene lazos (loops) ni aristas multiples.

[2]Un grafo es $k$-regular si cada vértice es incidente con exactamente $k$ aristas.