Matemática Discreta 1

Examen

Sábado 13 de julio de 2019

El examen dura tres horas, cada ejercicio múltiple opción vale diez puntos y no se restan puntos. No está permitido usar calculadora ni "material".

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5
C	C	A	A	B

Ejercicios de Múltiple Opción

Ejercicio MO1: Considere la siguiente ecuación de recurrencia:

$$a_{n+2} - a_n = 2^n, \text{ para } n \geq 0, a_0 = 0, a_1 = 1.$$

Entonces: **A)** $a_{1002} = \frac{4^{501}-1}{3}$ **y** $a_{1003} = \frac{2 \cdot 4^{501}+1}{3}$.
B) $a_{1002} = \frac{2^{1001}-1}{3}$ **y** $a_{1003} = \frac{2 \cdot 2^{1001}+1}{3}$.
C) $a_{1002} = \frac{4^{500}-1}{3}$ **y** $a_{1003} = \frac{2 \cdot 4^{500}}{3}$
D) $a_{1002} = 4^{501}$ **y** $a_{1003} = 4^{502}$. **Resolución**: La ec. car. es $\lambda^2 - 1 = 0$ de donde tenemos las raíces 1 y -1. Como 2 no es raíz de la ec. car, habrá una solución particular de la forma $a_n^{(P)} = A2^n$ que verificará:

$$A2^{n+2} - A2^n = 2^n \Rightarrow 4A - A = 1 \Rightarrow A = 1/3.$$

De donde la solución general será de la forma

$$a_n = c_1 + c_2(-1)^n + 2^n/3.$$

Imponiendo las condiciones iniciales tenemos:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 1/3 = 0 \\ c_1 - c_2 + 2/3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c_2 - 1/3 = -1 \Rightarrow c_2 = -1/3 \\ c_1 - c_2 + 2/3 = 1 \Rightarrow c_1 = 1/3 + (-1/3) = 0 \end{cases}$$

De donde $a_n = -(-1)^n/3 + 2^n/3$ y

$$a_{1002} = \frac{-1 + 2^{1002}}{3} = \frac{4^{501} - 1}{3}$$
$$a_{1003} = \frac{1 + 2^{1003}}{3} = \frac{2.4^{501} + 1}{3}$$

Ejercicio MO2: ¿Cuántas palabras se pueden formar usando dos letras de la palabra *meme* y tres letras de la palabra *penca*?

A) 1800

B) 1810

C) 1820

D) 1830

Resolución: Dividimos en casos disjuntos: 1) elegimos dos m's de *meme* y tres cualesquiera de *penca* de $C^5_3 = C^5_2 = 10$ formas y luego permutamos de $(2+3)!/2! = 5.4.3 = 60$ formas distintas para obtener $10.60 = 600$ palabras.

2) elegimos dos e's de *meme* y tres letras distintas de la e de *penca* de $C^4_3 = 4$ formas y luego permutamos de $(2 + 3)!/2! = 5.4.3 = 60$ formas distintas para obtener $4.60 = 240$ palabras.

3) elegimos dos e's de *meme* y tres letras de *penca* incluyendo la e de $C^4_2 = 6$ formas y luego permutamos de $(2+3)!/3! = 5.4 = 20$ formas distintas para obtener $6.20 = 120$ palabras.

4) elegimos la m y la e de *meme* y tres letras distintas de la e de *penca* de $C^4_3 = 4$ formas y luego permutamos de $(2+3)! = 5.4.3.2 = 120$ formas distintas para obtener $4.120 = 480$ palabras.

5) elegimos la m y la e de *meme* y tres letras de *penca* incluyendo la e de $C^4_2 = 6$ formas y luego permutamos de $(2+3)!/2! = 5.4.3 = 60$ formas distintas para obtener $6.60 = 360$ palabras.

Total: $600 + 240 + 120 + 480 + 360 = 1800$.

Ejercicio MO3:

Considere la sucesión a_n que verifica $a_0 = 1$ y para todo $n \geq 0$:

$$a_{n+1} = a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots a_n a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i a_{n-i}.$$

Si $f(x)$ es la función generatriz de a_n, entonces $f(1/4)$ vale:

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3 **Resolución**: Multiplicando por x^{n+1} y sumando de $n = 0$ a ∞ obtenemos:

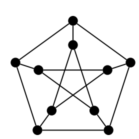
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i a_{n-i} x^{n+1}.$$

$$f(x) - a_0 = x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i x^i a_{n-i} x^{n-i} = x f(x) f(x).$$

de donde $A = f(1/4)$ verifica $A - 1 = A^2/4 \Rightarrow A^2 - 4A - 4 = 0 \Rightarrow A = (4 \pm \sqrt{16 - 16})/2 = 2$.

Ejercicio MO4:

El grafo de *Petersen* es el grafo 3-regular



y contiene:

A) un recorrido euleriano

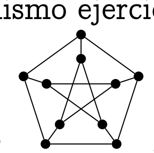
B) un circuito euleriano si se agregan 4 aristas

C) un ciclo hamiltoniano

D) un camino hamiloniano

Resolución: Si numeramos los vértices externos del 1 al 5 y los internos del 1' al 5', tendremos al camino hamiltoniano 1,2,3,4,5,5',3',1',4',2'.

(Otra versión del mismo ejercicio):

Considere el grafo  ¿Cuántas aristas hay que agregarle como mínimo para que el grafo resultante tenga un recorrido euleriano?

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

Resolución: Si numeramos los vértices externos del 1 al 5 y los internos del 1' al 5', y agregamos las aristas $12', 23', 34', 45'$ logramos que todos menos dos vértices tengan grado par, y como es conexo, tendrá un recorrido euleriano

Ejercicio MO5: Diremos que un árbol es **casi regular** si todos los vértices que no son hojas tienen el mismo grado. ¿Cuántos árboles no isomorfos casi regulares de 5 vértices hay? **A) Ninguno**

B) 1

C) 2

D) 3

Resolución: Hay pocos árboles no isomorfos con 5 vértices: $K_{1,4}$, subdivision elemental de $K_{1,3}$ y P_5, de los cuales los únicos casi regulares son el primero y el último.

Ejercicios de Desarrollo (Cada parte de los ejericios vale 5 ptos)

Ejercicio de Desarrollo 1: Sea T un árbol no trivial (con al menos una arista).

a) Probar que si a T le quito una arista, el grafo obtenido no es conexo.

b) Probar que si a T le agrego una arista, el grafo obtenido tiene un ciclo.

Resolución:

a) Por absurdo, si lo fuera existiría un camino que uniría los vértices de la arista quitada, dicho camino puede tomarse camino simple, que junto con la arista quitada, formaría un ciclo en el grafo original, contradiciendo que fuera acíclico, como lo es todo árbol por definición.

b) Al agregar una arista entre dos vértices x e y que no eran adyacentes se forma un ciclo con el único camino simple que une x con y en el grafo.

Ejercicio de Desarrollo 2: Sea $V = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ y $G = (V, \{\{i, j\} : i, j \in V, i \neq j\})$ el grafo completo sobre V y A_4 el conjunto de 4-ciclos de G o sea, el conjunto se subgrafos de G isomorfos a C_4.

a) ¿Cuál es el cardinal de A_4?

b) Dada una arista e de G, ¿cuántos grafos de A_4 la contienen?

c) Sea H un grafo con 10 vértices, y 34 aristas. Demuestre que H tiene (al menos) un *4-ciclo*.

Resolución:

a) $|A_4| = A_4^{10}/4/2 = 10.9.8.7/8 = 630 = C_4^{10}.C_1^3 = 10.9.8.7/4!.3 = 10.9.7$

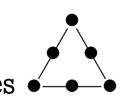
b) Dada una arista $\{i, j\}$ los ciclos que la contienen serán de la forma i, j, x, y, i. Las maneras de elegir x, y son $(10 - 2).(10 - 3) = 8.7 = 56$.

c) El grafo G tiene $C_2^{10} = 10.9/2 = 45$ aristas, por lo que a H le faltan $45 - 34 = 11$ aristas para ser completo. Si H no tuviera ningún 4-ciclo significaría que cada una de esas 11 arista que faltan cubren los 630 posibles 4-ciclos. Pero cada arista cubre 56 ciclos, por lo que 11 arista cubren a lo sumo $11.56 = 616 < 630$ ciclos, por lo que quedan como mínimo $630 - 616 = 14$ 4-ciclos sin cubrir, por lo que H tiene al menos 14 4-ciclos

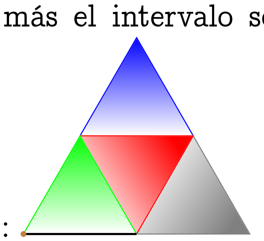
Ejercicio de Desarrollo 3: Considere un triángulo equilatero T de lado 1. Hallar la cantidad máxima N de puntos que se pueden colocar a distancia mayor o igual a 1/2.

a) Hallar N puntos a distancia mayor o igual a 1/2.

b) Demostrar que si se colocan $N + 1$ puntos dos de ellos estarán a distancia menor estricta que 1/2.

Resolución: a) $N = 6$, y una configuración que la realiza es 

b) Si consideramos como palomares los triángulos equilateros de lado 1/2 sin un borde, más el intervalo semiabierto $(0, 1] = \{(x, 0) : x \in (0, 1]\}$ más el origen

$\{(0, 0)\}$: 

Son seis palomares, que cubren el triángulo y tales que dos puntos en un mismo palomar están a distancia menor estricta que 1/2, por lo tanto si se toman $N+1 = 7$ puntos, dos estarán a distancia menor estricta que 1/2.

Ejercicio de Desarrollo 4: Considere grafos simples, o sea, sin aristas múltiples ni lazos:

a) Enunciar la fórmula de Euler para grafos planos conexos.

b) Demostrar que en todo grafo plano $G = (V, E)$ se cumple que $v - e + r = 1+\kappa(G)$ donde $v = |V|$, $e = |E|$, r es la cantidad de regiones que determina una inmersión plana cualquiera del grafo G y $\kappa(G)$ la cantidad de componentes conexas de G.

c) Dibujar todos los grafos planos no isomorfos que cumplen $v = 6$, $e = 3$ y $r = 1$.

Resolución:

a) $v - e + r = 2$

b) Por inducción en $k = \kappa(G)$: si $k = 1$ es la fórmula de Euler. Asumido cierto para $k = 1$, sea $k > 1$. Aplicamos la fórmula al grafo sin una de sus componentes C para obtener $v' - e' + r' = 1 + (k - 1) = k$. La componente C tendrá v'' vertices, e'' aristas y determinará $r'' - 1$ regiones acotadas, con $v = v' + v'', e = e' + e''$ y $r = r' + r'' - 1$. Como la componente C es conexa se cumplirá que $v'' - e'' + r'' = 2$ sumando obtenemos $v'+v''-(e'+e'')+r'+r'' = k+2$ de donde $v-e+r+1 = k+2 \Rightarrow v-e+r = 1+k$.

c)

1. Como G debe ser plano, se puede deducir que $6-3+1 = 1+\kappa(G) \Rightarrow \kappa(G) = 3$. Como $r = 1$, entonces solo se forma la región de área infinita, por lo tanto en cada componente no hay ciclos. Esto también dice que cada componente es un árbol. Para graficarlos todos, hay que repartir 3 aristas en 3 componentes conexas de tal forma que no se formen ciclos y descartar los grafos isomorfos. Una forma de graficarlos todos, es dibujar primero los que que tienen una componente con 3 aristas, luego los que tienen una con 2 aristas y una con

1 arista y luego los que tienen 1 arista en cada componente. Entonces, los grafos son los siguientes: