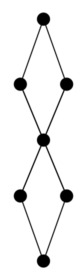
Matemática Discreta I

Examen

Viernes 15 de diciembre de 2017

El examen se aprueba con 60 puntos o más.
EJERCICIOS MÚLTIPLE OPCIÓN (total 40 puntos).
Correctas: 8 puntos, Incorrectas: -2 puntos.
Sin responder: 0 puntos.

EJERCICIO 1 La cantidad de árboles recubridores no isomorfos del siguiente grafo es:



Solución: La correcta es la opción **B**, o sea que la cantidad de árboles recubridores no isomorfos es 3.

Sabemos que por ser el grafo conexo admite árboles recubridores. Recordemos que un árbol recubridor ha de ser conexo (por ser árbol) y contener los 7 vértices del grafo (para ser recubridor).

Enumeremos los vértices de arriba a abajo y de izquierda a derecha. Son siete vértices: $\{1,2,3,4,5,6,7\}$, siendo 1 el vértice que aparece más arriba, 7 el que aparece más abajo, etc.
Primer caso: eliminar la arista $\{1,2\}$ y la arista $\{6,7\}$.
Segundo caso: eliminar la arista $\{1,2\}$ y la arista $\{4,5\}$.
Tercer caso: eliminar la arista $\{2,4\}$ y la arista $\{4,5\}$.

Toda otra posibilidad genera árboles isomorfos a alguno de los generados arriba.

EJERCICIO 2 La cantidad de funciones

$$f:\{1,\ldots,7\}\to\{1,\ldots,7\}$$

biyectivas con tres elementos fijos es:

Solución: La cantidad de funciones

$$f : \{1, \ldots, 7\} \to \{1, \ldots, 7\}$$

biyectivas con tres elementos fijos es: $35 \cdot 9$. La correcta es la opción **B.**

Una opción de cálculo es la siguiente. Primero fijamos cuáles serán los tres elementos fijos y cuáles serán los cuatro elementos que NO quedarán fijos. De los siete elementos seleccionamos tres para que sean "puntos fijos", tenemos C_3^7 casos. Luego, sabemos que la función no puede dejar fijos los otros cuatro elementos. Por lo tanto aparece el concepto de desorden: D_4. Sabemos (o bien se puede calcular) que $D_4 = 9$. Entonces, por la regla del producto, tenemos: $C_3^7 \times D_4$ funciones biyectivas que verifican las condiciones. O sea: $C_3^7 \times D_4 = 35 \times 9$ casos.

EJERCICIO 3 ¿Cuántas palabras capicúas de $4n$ letras pueden formarse usando **todas** las letras de $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$?

Solución: La correcta es la opción **A**. O sea: $\mathrm{Sob}(2n, n)$.
Al ser palabras capicúas de largo $4n$, quedan determinadas, por ejemplo, por las primeras $2n$ entradas. En esas $2n$ entradas hemos de usar todas las letras de $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, aunque podemos (debemos) repetir letras. El modelo correcto es considerar todas las funciones **sobreyectivas** desde el conjunto dominio de las $2n$ primeras entradas hacia el conjunto codominio dado por las n letras $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Necesitamos que las funciones sean sobreyectivas pues el ejercicio pide usar *todas* las letras de $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

EJERCICIO 4 Para hacerse una cuenta en *Fingstagram* se necesita ingresar una contraseña de 9 caracteres distintos que contenga exactamente 2 números y al menos 3 vocales.
¿Cuántas contraseñas posibles hay?
Nota: considerar que el abecedario tiene 27 letras.

Solución: La correcta es la opción **B**, o sea:

$$C_2^{10} \cdot \left(C_3^5 \cdot C_4^{22} + C_4^5 \cdot C_3^{22} + C_5^5 \cdot C_2^{22}\right) \cdot 9!$$

Veamos una opción de cálculo, que es la que sugiere la presentación de la solución. Primero elegimos dos de los diez posibles números que habremos de utilizar. Recordar que los dígitos posibles son: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Elegidos los números a utilizar, habremos de seleccionar las vocales. Pueden ser 3, 4 o 5 vocales. Observar que no podemos repetir ni vocales ni números porque la letra nos pide crear un código con caracteres distintos. Para elegir tres vocales tenemos C_3^5 casos, para elegir cuatro vocales tenemos C_4^5 casos, para elegir cinco vocales tenemos C_5^5 casos. Si elegimos tres vocales, nos toca elegir cuatro caracteres más (para completar los nueve) entre 22 (=27 - 5) letras del abecedario: C_4^{22} casos. Si elegimos cuatro vocales, nos toca elegir tres caracteres más (para completar los nueve) entre 22 (=27 - 5) letras del abecedario: C_3^{22} casos. Si elegimos cinco vocales nos toca elegir dos caracteres más (para completar los nueve) entre 22 (=27 - 5) letras del abecedario: C_2^{22} casos. En total se tiene $C_2^{10} \cdot \left(C_3^5 \cdot C_4^{22} + C_4^5 \cdot C_3^{22} + C_5^5 \cdot C_2^{22}\right)$ formas de elegir los 9 caracteres. Luego de elegidos tenemos 9! formas de ordenar los nueve caracteres en los nueve lugares para crear la clave de *Finstagram*. Así obtenemos el resultado final:

$$C_2^{10} \cdot \left(C_3^5 \cdot C_4^{22} + C_4^5 \cdot C_3^{22} + C_5^5 \cdot C_2^{22}\right) \times 9!$$

EJERCICIO 5 Sea W_n el grafo rueda orientado con $n+1$ vértices. Se adjudica un número de $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ a cada vértice, incluyendo el vértice central, sin repetir. ¿De cuántas maneras se puede realizar este etiquetado de vértices?

Solución: La respuesta correcta es la **C**, o sea $\frac{(n+1)!}{n}$. Una forma de argumentar el resultado es la siguiente. El grafo rueda tiene un vértice central, de grado n, y tiene n vértices de grado 3. Hay que elegir un número de $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ para el vértice central. Tenemos $n+1$ posibilidades. Luego, nos quedan n números para etiquetar los n vértices restantes (los de grado tres). Sin embargo un etiquetado y sus n rotaciones determinan el mismo etiquetado para el grafo rueda. Por lo tanto, en total tenemos: $(n+1) \times \frac{n!}{n} = \frac{(n+1)!}{n}$ formas de etiquetar este grafo orientado.

EJERCICIOS DE DESARROLLO (total 60 puntos)

EJERCICIO 6 Resolver la siguiente recurrencia:

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 3^n \; n \geq 2,$$

con $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

Solución: Es la parte **m** del ejercicio 3, del Práctico 5, 2017, y es también uno de los ejercicios del examen de marzo 2001. Queríamos premiar con ésto a quienes habían hecho los ejercicios de Práctico y habían preparado el examen practicándose con ejercicios de otros parciales y exámenes.

EJERCICIO 7

a. Enunciar y demostrar la caracterización de grafos con recorrido euleriano. *Puede utilizar resultados previos si los cita de manera correcta.*

Solución:

Ver teórico en el Grimaldi, o bien ver OpenFing.

Para que un grafo admita un recorrido euleriano (no circuito), el número de vértices con grado impar ha de ser exactamente 2.

b. Sea G un grafo con dos componentes conexas con exactamente cuatro vértices de grado impar, y tal que ninguna componente conexa de G (como grafo) admite un circuito euleriano. ¿De cuántas maneras se puede agregar una arista a G entre vértices de G tal que exista un recorrido euleriano en el grafo resultante de agregarle dicha arista?

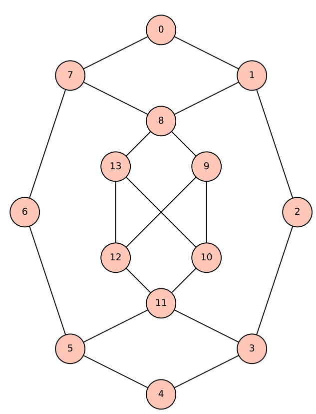
Solución: Si ninguna de las dos componentes conexas de G admite circuito euleriano, entonces en ambas componentes conexas hay vértices con grado impar. En total hay 4 vértcies con grado impar, y ambas componentes tienen al menos uno. Pero, vale recordar que el número de vértices de grado impar no puede ser impar. Es decir, ambas componentes conexas han de tener dos vértices de grado impar. Luego, podemos "agregar" una arista entre vértices de grado impar, uno de cada componente. O sea que en total tenemos cuatro casos posibles que resuleven el problema, pues en el grafo resultante, luego de agregar la arista, solo habrá dos vértices de grado impar y es conexo. Obsérvese que no sirve agregar una arista entre vértices de grado impar en la misma componente, pues, aunque el grafo resultante tendrá solo dós vértices de grado impar, el mismo no resulta conexo.

EJERCICIO 8

a. Sea G un grafo, probar que cualquier ciclo hamiltoniano tiene que contener las dos aristas adyacentes a todo vértice de grado dos.

Solución: Si se está delante de un ciclo hamiltoniano, entonces todos los vértices del grafo participan del ciclo exactamente una vez. Todo vértice es extremo de exactamente dos aristas **en el ciclo**, por lo que todo vértice de grado 2, tendrá participando ambas aristas adyacentes en el ciclo hamiltoniano.

b. ¿Tiene recorridos hamiltonianos? *Justificar.*



Solución: La secuencia ntural: 0 - 1 -2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 12 - 13, representa un recorrido hamiltoniano.

c. Probar que el siguiente grafo no tiene ciclos hamiltonianos.

Si existiera un ciclo hamiltoniano Ω, debiera contener las aristas adyacentes de 0, las aristas adyacentes de 1, ..., las aristas adyacentes de 7 (por la parte **a.** de este ejercicio). Luego se formaría un ciclo que no es hamiltoniano. Para conectar estos vértices con alguno de los vértices restantes en Ω, necesariamente debemos repetir uno de los vértices entre 0 y 7 en el ciclo hamiltoniano, lo cual es una contradicción.