Solución
Matemática Discreta I
Examen
Sábado 16 de julio de 2016

EJERCICIO 1 Juan quiere repartir entre sus 3 hijos 7 galletas de chocolate y 3 de vainilla. ¿De cuántas maneras puede hacer esto? Opciones: A) 280; B) 360; C) 240; D) 220; E) 421.

Solución Primero repartimos las 7 galletas de chocolate entre los 3 hijos de $CR_7^3 = 36$ maneras, luego repartimos las galletas de vainilla de $CR_3^3 = 10$ maneras. Aplicando la regla del producto, tenemos que hay 360 maneras de repartir las galletas.

EJERCICIO 2 Hay 210 niños que van a un campamento de fútbol de verano. Cada uno de ellos es asignado para trabajar con uno de los 20 entrenadores. Se sabe que cada entrenador trabaja con un número distinto de niños y que cada entrenador trabaja con al menos un niño. ¿De cuántas maneras se pueden formar los grupos de niños? Opciones: A) $210 \times 209 \times \cdots \times 181$; B) CR_{20}^{210}; C) $210!$; D) $\dfrac{210!}{1!2!3!\cdots 20!}$; E) $\dfrac{210!}{20!}$.

Solución Note que $1 + 2 + \cdots + 20 = \frac{20\times 21}{2} = 210$. Para cada número entre 1 y 20 inclusive, existe un entrenador trabajando con exactamete ese número de niños. Luego hay,

$$C_1^{210} \times C_2^{209} \times C_3^{207} \cdots C_{19}^{39} \times C_{20}^{20} = \frac{210!}{1!2!3!\cdots 20!}$$

posibilidades de armar los grupos.

EJERCICIO 3 Se ha comprado un lote de banderas unicolores, bicolores y tricolores. En todas ellas figura, al menos, el blanco, el rojo o el negro. Además, en ocho de ellas no figura el blanco, en diez no figura el rojo y en cuatro no figura el negro. Por otra parte, cinco banderas tienen, al menos, los colores rojo y blanco, siete el blanco y el negro y seis el rojo y el negro. Finalmente, cuatro tienen los tres colores. Determine el número de banderas unicolor rojas. Opciones: A) 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) 5.

Solución Denotemos por B al conjunto de las banderas donde figura el color blanco, por R al conjunto de las banderas donde figura el color rojo y por N al conjunto de las banderas donde figura el color negro. Según el enunciado tenemos que los cardinales de los complementos de estos conjuntos son los siguientes:

$|\overline{B}| = 8, |\overline{R}| = 10, |\overline{N}| = 4.$

También se tiene, $|R \cap B| = 5, |R \cap N| = 6, |N \cap B| = 7$ y $|B \cap R \cap N| = 4$. Denotemos por R^* el conjunto de banderas unicolor rojas. Luego, $|R^*| = |R| - |R \cap N| - |R \cap B| + |R \cap B \cap N| = |R| - 7$. Luego, debemos hallar $|R|$. Es claro que $|B \cup R \cup N| = |R| + |\overline{R}|$ y así $|R| = |B \cup R \cup N| - 10$. Resta hallar $|B \cup R \cup N|$ y lo haremos usando el principio de inclusión-exclusión.

$$|B \cup R \cup N| = |B| + |R| + |N| - |R \cap B| - |R \cap N| - |N \cap B| + |B \cap R \cap N| = |B| + |R| + |N| - 14$$

$$3|B \cup R \cup N| = |B| + |\overline{B}| + |R| + |\overline{R}| + |N| + |\overline{N}| = |B| + |R| + |N| + 22$$

$$|B \cup R \cup N| = 18$$

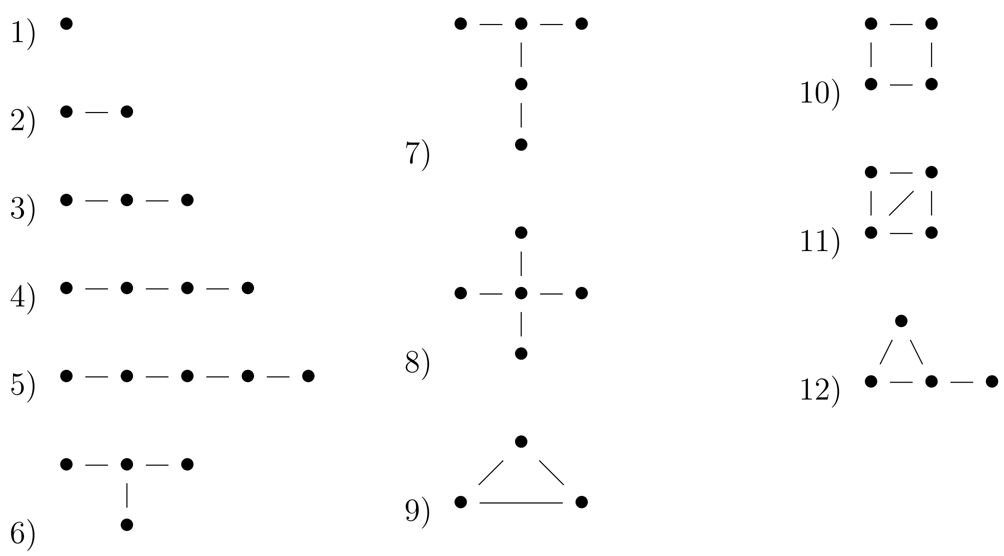
Y así, $|R^*| = 1$.

EJERCICIO 4 Sea $\mathcal{X}$ el conjunto de los grafos (no dirigidos) $G = (V, E)$ conexos y no isomorfos entre ellos tales que $|V| + |E| \leq 9$. Señale la opción correcta.

Opciones:

A) $|\mathcal{X}| \leq 10$.
B) Todos los vértices de todos los grafos de $\mathcal{X}$ tienen grado menor o igual a 3.
C) No existe $G \in \mathcal{X}$ con más de un ciclo.
D) En $\mathcal{X}$ hay al menos 7 árboles.
E) $C_i \in \mathcal{X}$, $i \in \{3, 4, 5\}$.

Solución Los siguientes 11 grafos no isomorfos satisfacen las condiciones del enunciado:



Luego, la opción A es falsa. Si observamos el grafo (8) vemos que hay un vértice con grado 4, luego la opción B es falsa. El grafo (11) tiene más de un ciclo, luego la C es falsa. Es claro que C_5 no cumple las condiciones del enunciado, luego E es falsa. Los primeros ocho grafos son árboles, luego la opción D es la correcta.

EJERCICIO 5 Sea $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Determine la cantidad de ciclos Hamiltonianos distintos en K_n.
Opciones: A) $\dfrac{n!}{2n}$; B) $\dfrac{(n-1)!}{2n}$; C) $(n-1)!$; D) $\dfrac{n!}{n}$; E) $\dfrac{2n!}{n-1}$.

Solución El problema es equivalente a determinar la cantidad de ciclos distintos de longitud n en K_n. El total de estos ciclos es $n!$, pero por cada ciclo hay que tomar en cuenta que las n rotaciones y los reversos generan el mismo ciclo. Luego, la respuesta es $\dfrac{n!}{2n}$.

EJERCICIOS DE DESARROLLO (total 50 puntos)

Justifique su respuesta en cada uno de los siguientes ejercicios.

EJERCICIO 6 *(20 puntos)* Sean $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $Y = \{3, 4\}$. Defina una relación $\mathcal{R}$ en el conjunto de partes de X dada por: A$\mathcal{R}$B si $A \cup Y = B \cup Y$.

1. Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
2. ¿Cuál es la clase de equivalencia del conjunto $\{1, 2\}$?
3. ¿Cuántas clases de equivalencia hay?

Solución

1. $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia pues es reflexiva, simétrica y transitiva,

Reflexiva: $A \cup Y = A \cup Y$ luego A$\mathcal{R}$A
Simétrica: Es claro que A$\mathcal{R}$B $\iff$ B$\mathcal{R}$A
Transitiva: $A \cup Y = B \cup Y \wedge B \cup Y = C \cup Y \Rightarrow A \cup Y = C \cup Y$.

2. Como $\{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$, los elementos en la clase de equivalencia $[\{1, 2\}]$ son los conjuntos que tengan a 1 y 2 entre sus elementos, pero no al 5, es decir, $[\{1, 2\}] = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$.

3. Dado un subconjunto A de X, la clase de equivalencia de A es,

$[A] = \{A, A \cup \{3\}, A \cup \{4\}, A \cup \{3,4\}\}$. Se generan clases de equivalencia distintas, cada vez que se elige como representante un subconjunto de $\{1,2,5\}$. Cada una de estas clases con cardinal 4. Como el conjunto de partes de $\{1,2,5\}$ tiene cardinal $2^3 = 8$ y precisamente $8 \times 4 = 32$ es el cardinal de partes de X, se tiene que no hay más clases de equivalencia. Luego, hay 8 clases de equivalencia: $[\emptyset], [\{1\}], [\{2\}], [\{5\}], [\{1,2\}], [\{1,5\}], [\{2,5\}], [\{1,2,5\}]$.

EJERCICIO 7 *(15 puntos)* Llamamos a una sucesión *buena* si en sus términos aparecen solo los dígitos 0,1,2,3,4 y si la diferencia entre dos términos consecutivos cualesquiera es 1. Sea n un entero no negativo.

Soluciones

1. ¿Cuántas sucesiones buenas de largo 4 terminan en 0 o 4?

   3434, 3234, 1234, 1010, 1210, 3210. En total hay 6 sucesiones buenas que terminan en 0 o 4.

2. ¿Cuántas sucesiones buenas de largo 3 terminan en 1 o 3?

   343, 323, 123, 101, 121, 321. En total hay 6 sucesiones buenas que terminan en 1 o 3 y nos damos cuenta que son los tres primeros dígitos de todas las sucesiones buenas de largo 4 que terminan en 0 o 4, lo que nos lleva a pensar que la cantidad de sucesiones buenas de largo $n+1$ que terminan en 0 o 4 es la misma que la cantidad de sucesiones buenas de largo n que terminan en 1 o 3.

3. ¿Cuántas sucesiones buenas de largo 4 terminan en 2?

   3432, 3232, 1232, 1012, 1212, 3212. En total hay 6 sucesiones buenas que terminan en 2 y nos damos cuenta que los tres primeros dígitos de todas estas sucesiones son las sucesiones obtenidas en el paso anterior, lo que nos lleva a pensar que la cantidad de sucesiones buenas de largo $n+1$ que terminan en 2 es la misma que la cantidad de sucesiones buenas de largo n que terminan en 1 o 3.

4. ¿Cuántas sucesiones buenas tienen una cantidad 2n de términos?

5. ¿Cuántas sucesiones buenas tienen una cantidad 2n+1 de términos?

   Responderemos ambas preguntas en el mismo desarrollo.

   Denotemos por,

   A_n : la cantidad de sucesiones buenas de largo n que terminan en 0 o 4.

   B_n : la cantidad de sucesiones buenas de largo n que terminan en 1 o 3.

   C_n : la cantidad de sucesiones buenas de largo n que terminan en 2.

   $A_{n+1} = B_n$, porque cada sucesión buena de largo $n+1$ que termina en 0 o 4, puede convertirse en una sucesión buena de largo n que termina en 1 o 3 suprimiendo el último dígito.

$C_{n+1} = B_n$, porque cada sucesión buena de largo $n+1$ que termina en 2, puede convertirse en una sucesión buena de largo n que termina en 1 o 3 suprimiendo el último dígito.

$B_{n+1} = A_n + 2C_n$, porque cada sucesión buena de largo n que termina en 0 o 4, puede convertirse en una sucesión buena de largo $n+1$ añadiendo un 1 (si termina en 0) o un 3 (si termina en 4) y cada sucesión buena de largo n que termina en 2 se convierte en buena de largo $n+1$ añadiendo un 1 o un 3.

Luego, $B_{n+1} = A_n + 2C_n = B_{n-1} + 2B_{n-1} = 3B_{n-1}$. Así, para todo $n \geq 2$, $B_{n+1} = 3B_{n-1}$. Se tiene entonces que $B_4 = 3B_2$, $B_6 = 3B_4 = 3^2B_2$ y en general $B_{2n} = 3^{n-1}B_2$. Es claro que $B_2 = 4$ y por lo tanto, $B_{2n} = 4 \times 3^{n-1}$.

Ahora, $A_{2n} + B_{2n} + C_{2n} = B_{2n-1} + B_{2n} + B_{2n-1} = B_{2n} + 2B_{2n-1}$, por lo que necesitamos calcular B_{2n-1} para resolver el ítem 4.

Como para todo $n \geq 2$, $B_{n+1} = 3B_{n-1}$, se tiene que $B_3 = 3B_1$, $B_5 = 3B_3 = 3^2B_1$ y en general $B_{2n+1} = 3^nB_1$. Es claro que $B_1 = 2$ y por lo tanto, $B_{2n+1} = 2 \times 3^n$.

Finalmente:

- $A_{2n} + B_{2n} + C_{2n} = B_{2n} + 2B_{2n-1} = 4 \times 3^{n-1} + 2 \times 2 \times 3^{n-1} = 8 \times 3^{n-1}$, para todo $n \geq 1$.
- $A_{2n+1} + B_{2n+1} + C_{2n+1} = B_{2n} + B_{2n+1} + B_{2n} = 2 \times 4 \times 3^{n-1} + 2 \times 3^n = 14 \times 3^{n-1}$, para todo $n \geq 1$.

6. ¿Cuántas sucesiones buenas existen con 10 términos?

   $A_{10} + B_{10} + C_{10} = B_9 + B_{10} + B_9 = B_{10} + 2B_9 = 4 \times 3^4 + 2 \times 2 \times 3^4 = 648$

EJERCICIO 8 *(15 puntos)* Tienes $2t+1$ pelotas para colocar en 3 cajas, pero la suma de las pelotas en 2 de las cajas debe ser mayor que las pelotas en la otra caja.

1. ¿Alguna de las cajas puede estar vacía?
2. Encuentre la función generatriz que describe el problema.
3. ¿De cuántas maneras diferentes puede realizarse la instrucción del enunciado?

Solución

1. Si una caja estuviera vacía, habría que distribuir $2t+1$ pelotas (número impar) entre dos cajas y por lo tanto una quedaría con más pelotas que la otra y no se cumpliría que la suma de las pelotas en dos cajas siempre es mayor que las pelotas en la otra caja. Luego ninguna caja puede estar vacía.

2. Es claro que ninguna caja puede tener más de t pelotas y esto garantiza que la suma de las pelotas en 2 cajas cualesquiera es mayor que las pelotas en la tercer caja. Por esto y por el item anterior, la función generatriz que describe el problema es $(x + x^2 + \cdots + x^t)^3$, pues cada una de las 3 cajas tiene entre 1 y t pelotas.

3. Recordemos que $1 - x^t = (1 - x)(1 + x + \cdots + x^{t-1})$. Luego, $(x + x^2 + \cdots + x^t)^3 = x^3(1 + x + \cdots + x^{t-1})^3 = \dfrac{x^3(1 - x^t)^3}{(1 - x)^3} = x^3(1 - 3x^t + 3x^{2t} - x^{3t})(1 - x)^{-3}$

Recordemos también que $(1 - x)^{-n} = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n + i - 1}{i} x^i$, luego

$$(x + x^2 + \cdots + x^t)^3 = x^3(1 - 3x^t + 3x^{2t} - x^{3t}) \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2 + i}{i} x^i$$

Queremos el coeficiente de x^{2t+1} y según la relación anterior tenemos que mirar solo los términos $x^3\binom{2t}{2t-2}x^{2t-2}$ y $-3x^{3+t}\binom{t}{t-2}x^{t-2}$. Así, el coeficiente de x^{2t+1} es,

$$\binom{2t}{2t - 2} - 3\binom{t}{t - 2} = \frac{t(t + 1)}{2}$$

Hay entonces $\dfrac{t(t + 1)}{2}$ maneras distintas de distribuir $2t + 1$ pelotas en 3 cajas tal que la suma de las pelotas en cualesquiera dos cajas sea mayor que la cantidad de pelotas en la otra caja.