Matemática Discreta I

Examen

Jueves 22 de diciembre de 2016

Número de examen	Nombre y Apellido	Cédula de Identidad

RESPUESTAS					No completar		
1	2	3	4	5	6	7	8

El examen se aprueba con 60 puntos o más.

EJERCICIOS MÚLTIPLE OPCIÓN (total 50 puntos).

Correctas: 10 puntos, Incorrectas: -2 puntos, Sin responder: 0 puntos.

EJERCICIO 1 ¿Cuántas palabras se pueden formar con las letras de SKYWALKER que empiecen en vocal y no contengan la secuencia RK? Opciones: A) $7!$; B) $8!$; C) $7! \times 6$; D) $\dfrac{7!}{2!}$; E) $7! \times 7$.

EJERCICIO 2 Sea $A = \{n \in \mathbb{Z} : 3 \leq n \leq 96 \quad \text{y } n \text{ es múltiplo de } 3\}$. Tenemos en A la relación de orden parcial definida por $n\mathcal{R}m$ si n divide a m. Entonces: Opciones:

A) No hay máximo, la cadena más larga tiene largo 5, la anticadena más larga tiene largo 11.

B) No hay máximo, la cadena más larga tiene largo 6, la anticadena más larga tiene largo 14.

C) No hay máximo, la cadena más larga tiene largo 6, la anticadena más larga tiene largo mayor a 14.

D) Hay máximo, la cadena más larga tiene largo 6, la anticadena más larga tiene largo 11.

E) Ninguna de las anteriores.

EJERCICIO 3 Suponga que desarrollamos la expresión $(x + y + z)^n$ y que los términos son reunidos de acuerdo a las reglas elementales del álgebra, por ejemplo, $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz$. ¿Cuál es el número de términos resultantes en la fórmula? Opciones: A) $\binom{n+2}{n}$; B) $\binom{n+1}{2}$; C) $n(n + 1)$; D) $3!\binom{n}{2}$; E) $\binom{n+3}{n} - 4$.

EJERCICIO 4 ¿Cuántos enteros en el conjunto $\{1,2,3,4, \ldots, 360\}$ tienen al menos un divisor primo en común con 360? Opciones: A) 122; B) 244; C) 264; D) 294; E) 324.

EJERCICIO 5 Encuentre el coeficiente de x^{2016} en la función generatriz

$$f(x) = \frac{1}{(1 + 5x)^2}$$

Opciones: A) 5^{2016}; B) 2016×5^{2016}; C) 2016×5^{2017}; D) 2017×5^{2016}; E) $2016 \times (-5)^{2017}$.

EJERCICIOS DE DESARROLLO (total 50 puntos)

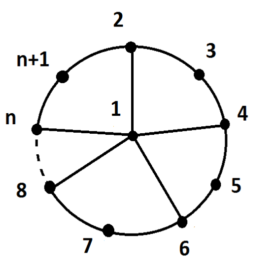
Justifique su respuesta en cada uno de los siguientes ejercicios.

EJERCICIO 6 *(15 puntos)* Pruebe que todo grafo (simple) tiene dos vértices del mismo grado.

EJERCICIO 7 *(15 puntos)* Dados $(A, \leq_1)$ y $(B, \leq_2)$ conjuntos parcialmente ordenados y una función $f : A \to B$ decimos que f es creciente si $\forall x, y \in A,\ x \leq_1 y \Rightarrow f(x) \leq_2 f(y)$. Supongamos que $\leq_1$ es un orden total en A.

1. Probar que si $f : A \to B$ es creciente y biyectiva entonces $\leq_2$ es un orden total en B. ¿Es cierto esto si f es solo sobreyectiva?
2. Probar que si $f : A \to B$ es creciente, inyectiva y $|A| = n$, entonces existe en B una cadena de n elementos. ¿Es cierto esto si f no es inyectiva?

EJERCICIO 8 *(20 puntos)* En el siguiente grafo de $n + 1$ vértices (asumir n par), el vértice 1 está unido por una arista con cada vértice par.



1. Plantee un sistema de relaciones de recurrencias que determine el número de caminos distintos de longitud k en el grafo.
2. ¿Cuántos caminos de longitud k empiezan en vértices etiquetados con números pares?
3. ¿Cuántos caminos distintos de longitud k hay en el grafo (en función de n)?
4. ¿Cuántos caminos distintos de longitud 3 hay en el grafo (en función de n)?

Nota 1: Para este ejercicio considere que un camino y su reverso son distintos.
Nota 2: La cantidad de caminos de longitud cero es cero.