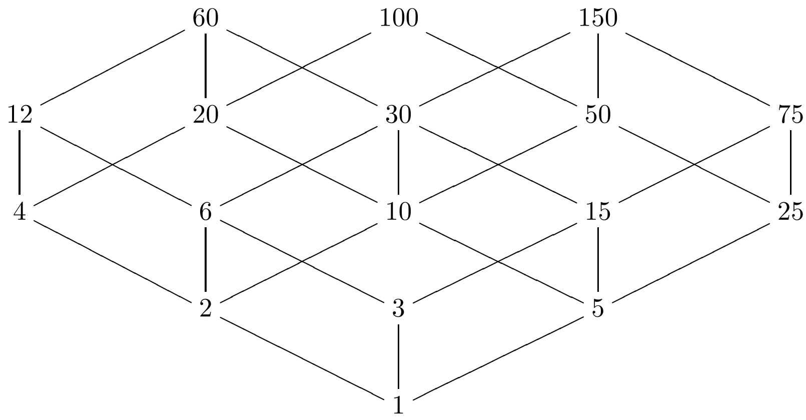
Solución al examen propuesto de Matemática Discreta 1.

UdelaR/FIng/IMERL

16 de diciembre de 2015

1. Observamos el diagrama de Hasse de (X, E):



   300 es cota superior de X. Si y es cota superior de X, entonces, en particular, $3 \setminus y, 4 \setminus y$ y $25 \setminus y$. Puesto que $3, 4$ y 25 son coprimos, $300 = 3 \times 4 \times 25 \setminus y$. Por lo tanto, 300 es el supremo de X. Hay 3 elementos maximales: 60, 100 y 150; por lo cual no tiene máximo. A es correcta. Podemos observar ahora que, además, las restantes son falsas:

   B afirma que no hay supremo, por lo cual es falsa. C y D afirman que hay máximo, por lo cual son falsas. D afirma que hay un solo elemento maximal, por lo cual es falsa.

2. Sean:

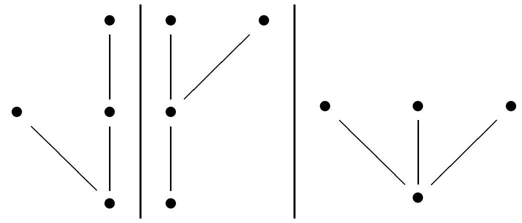
x_1	:	cantidad de helados de chocolate
x_2	:	cantidad de helados de frutilla
x_3	:	cantidad de helados de menta

   Entonces, una solución del problema es una terna $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3$ tal que $x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$. Si definimos $x_4 := 6 - (x_1 + x_2 + x_3)$, entonces x_4 es natural y

   $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \tag{1}$$

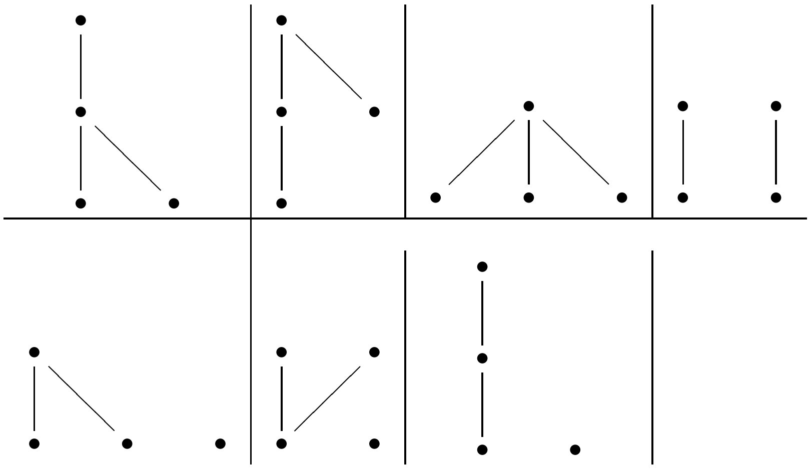
Se trata pues de contar la cantidad de soluciones $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{N}^4$ de (1). Ese problema se resuelve mediante la fórmula de combinaciones con repetición. La respuesta es $CR_6^4 = \binom{9}{6} = 84$.

3. Empecemos descartando que $(A, \mathcal{R})$ sea un orden total (opción E), puesto que en ese caso, el orden tendría una cadena de largo 4, contradiciendo la hipótesis. Los diagramas



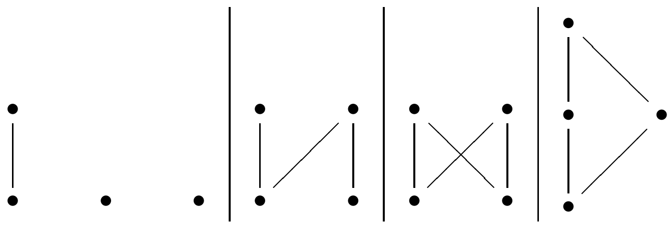
prueban que hay al menos 3 diagramas de Hasse que tienen mínimo, mostrando que C es falsa.

Ahora consideramos los siguientes diagramas adicionales:



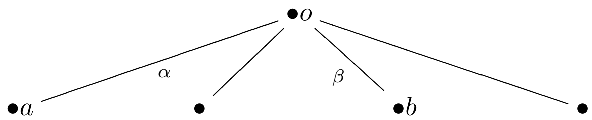
que ya suman 10, por lo cual D es falsa.

Luego, completamos todos los diagramas que corresponden a las relaciones que cumplen las hipótesis:



Entonces hay 14 diagramas y A es verdadera. Hay sólo 4 con máximo y B es falsa.

4. El grafo bipartito $K_{1,4}$ es:



Todo camino que empieza en a y termina en b tiene como primer arista α y como última arista β. En particular, si el camino tiene largo 100, satisface la forma general

Observemos que $\forall i \quad 1 \leq i \leq 49$ se tiene $e_{2i} = e_{2i+1}$, puesto que habiendo llegado a un vértice colgante, sólo es posible retornar a o por la arista por la cual se llegó al vértice. Entonces, el camino queda determinado al elegir las aristas e_{2i} con $1 \leq i \leq 49$, las cuales se pueden elegir arbitrariamente entre las 4 posibles. Entonces, la cantidad de caminos posibles es 4^{49}, que es igual a 2^{98}.

5. La desigualdad a probar para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ es:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \tag{2}$$

- *base inductiva*:
  Para $n = 1$: (2) se satisface puesto que $\frac{1}{1^2} = 1 \leq 1 = 2 - \frac{1}{1}$
- *paso inductivo*:
  - *hipótesis de inducción*: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$
  - *tesis de inducción*: $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$

$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2} = (\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}) + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$, estando justificada la desigualdad por la hipótesis de inducción. Entonces, para probar la tesis de inducción, basta con probar que $2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$. Tenemos:

$$
\begin{aligned}
2-\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{(n+1)^2} &\leq 2-\tfrac{1}{n+1} &\iff\\
-\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{(n+1)^2} &\leq -\tfrac{1}{n+1} &\iff\\
\tfrac{1}{(n+1)^2} &\leq \tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n+1} &\iff\\
\tfrac{1}{(n+1)^2} &\leq \tfrac{1}{n(n+1)} &\iff\\
(n+1)^2 &\geq n(n+1) &\iff\\
n^2+2n+1 &\geq n^2+n &\iff\\
n+1 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Siendo esto último verdadero para todo natural n.

6.

(a) Sea a_n el número de tiras de unos y doses, cuyos dígitos suman n. Dada una tira que suma n, quitando el último dígito obtenemos una tira que suma $n-1$ o bien una tira que suma $n-2$; según si la tira inicial termina en 1 o en 2 respectivamente. Entonces, a_n satisface la siguiente relación de recurrencia:

$$\forall n \geq 2 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \tag{3}$$

Además, las condiciones iniciales son $a_0 = a_1 = 1$ (la tira vacía es la única que suma 0).

El polinomio característico de (3) es $x^2 - x - 1$, cuyas raíces son $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. El espacio de soluciones de (3) es el $\mathbb{R}$-espacio vectorial generado por las sucesiones $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$ y $(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$. Entonces, debemos encontrar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $a_n = \alpha(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \beta(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ satisfaga las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} \alpha + \beta & = 1 \\ \alpha(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + \beta(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) & = 1 \end{cases}$$

sistema lineal de 2×2 cuya solución es $\alpha = 1 + \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

(b) Multiplicando (3) por x^n obtenemos:

$$\forall n \geq 2 \qquad a_n x^n = a_{n-1} x^n + a_{n-2} x^n \tag{4}$$

Sumando, obtenemos:

$$\sum_{i=2}^{+\infty} a_i x^i = \sum_{i=2}^{+\infty} a_{i-1} x^i + \sum_{i=2}^{+\infty} a_{i-2} x^i \tag{5}$$

Definimos $f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$ (esto es, f es la función generatriz pedida). Como $a_0 = a_1 = 1$, entonces (5) se expresa en función de f como:

$$f(x) - x - 1 = x(f(x) - 1) + x^2 f(x) \tag{6}$$

de donde $f(x)(x^2 + x - 1) = -1$ y se despeja $f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$.

7. Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de todas las palabras con o sin sentido que se pueden obtener reaordenando `CHANCHA`. Definimos los siguientes subconjuntos de $\mathcal{T}$:

$\mathcal{A}$	:	palabras que tienen dos `A` consecutivas.
$\mathcal{C}$	:	palabras que tienen dos `C` consecutivas.
$\mathcal{H}$	:	palabras que tienen dos `H` consecutivas.

La respuesta se obtiene calculando $\#(\mathcal{T} \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{H}))$. Por el *principio de inclusión/exclusión* se tiene:

$$\begin{aligned}\#(\mathcal{T} \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{H})) = \\ \#\mathcal{T} - (\#\mathcal{A} + \#\mathcal{C} + \#\mathcal{H}) + \\ (\#\mathcal{A} \cap \mathcal{C} + \#\mathcal{A} \cap \mathcal{H} + \#\mathcal{C} \cap \mathcal{H}) - \\ \#\mathcal{A} \cap \mathcal{C} \cap \mathcal{H}\end{aligned} \tag{7}$$

Resta pues calcular todos los sumandos del miembro derecho de (7):

- $\#\mathcal{T} = \dfrac{7!}{2!2!2!}$.
- $\#\mathcal{A} = \#\mathcal{C} = \#\mathcal{H} = \dfrac{6!}{2!2!}$.
- $\#\mathcal{A} \cap \mathcal{C} = \#\mathcal{A} \cap \mathcal{H} = \#\mathcal{C} \cap \mathcal{H} = \dfrac{5!}{2!}$.
- $\#\mathcal{A} \cap \mathcal{C} \cap \mathcal{H} = 4!$.

Substituyendo en (7), obtenemos: $\frac{7!}{8} - 3\frac{6!}{4} + 3\frac{5!}{2} - 4! = 630 - 540 + 180 - 24 = 246$.