Solución Examen Matemática Discreta I

Lunes 20 de julio de 2015

M01	M02	M03	M04	M05
D	B	C	D	D

Múltiple Opción 1

Ubicamos 4 asientos entre los 5 estudiantes (cada uno con asientos) para asegurar que no se sienten de forma consecutiva. Hay $CR_6^6 = \binom{11}{6}$ maneras de ubicar los seis asientos restantes entre los seis espacios delimitados por los estudiantes, incluyendo las puntas. Hay 5! maneras de ordenar los estudiantes. Por regla del producto tenemos $\binom{11}{6} \times 5! = 11!/6! = 55440$ maneras de sentarse cumpliendo las restricciones solicitadas, y la opción correcta es la *D*.

Múltiple Opción 2

El coeficiente en x^2y^3 del multinomio $(x - y + 3xy + 2)^5$ se puede armar de tres maneras, según la cantidad de veces que elegimos el término en x:

- El caso $(x)^0(-y)^1(3xy)^2(2)^2$ aporta $-(3)^2 2^2 \frac{5!}{2!2!} = -1080$ al coeficiente en x^2y^3.
- El caso $(x)^1(-y)^2(3xy)^1(2)^1$ aporta $3 \times 2\frac{5!}{2!} = 360$ al coeficiente en x^2y^3.
- El caso $(x)^2(-y)^3(3xy)^0(2)^0$ aporta $-\frac{5!}{3!2!} = -10$ al coeficiente en x^2y^3.

Luego, el coeficiente en x^2y^3 vale $-1080 + 360 - 10 = -730$, y la opción correcta es la *B*.

Múltiple Opción 3

Como $\#[1] = 5$ y $\#[2] = 4$, los elementos 1 y 2 están en clases diferentes. Hay $\binom{8}{4} = 70$ maneras de elegir elementos relacionados con 1, y luego $\binom{4}{3} = 4$ maneras de elegir los restantes elementos relacionados con 2. El elemento faltante pertenece a una clase de cardinal 1. Luego, tenemos $70 \times 4 = 280$ relaciones de equivalencia posibles, y la opción correcta es la *C*.

Múltiple Opción 4

La cantidad de árboles recubridores de un grafo completo K_n es n^{n-2}. En K_4 tenemos $2^{4-2} = 16$ árboles recubridores, y la opción correcta es la *D*.

Múltiple Opción 5

Hay $\binom{4}{2}$ matrices binarias 2×2 que tienen exactamente dos ceros, y forman una anticadena de máximo cardinal. Por el Teorema de Dilworth, el menor número de cadenas disjuntas en las que se puede descomponer $(M_2, \leq)$ es también 6, y la opción correcta es la *D*.

Problema 1

Tomando la función generatriz en cada miembro tenemos que:

$$a(x)b(x) = b(x)/(1 - x)$$
$$b(x) = a(x)/(1 - x)$$

Resolviendo tenemos que $a(x) = 1/(1 - x)$ u $b(x) = 1/(1 - x)^2$. Luego, se obtiene que $a_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, y $b_n = n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Problema 2

A) Por la fórmula de la suma de los grados de los vértices, en todo grafo cúbico se cumple que $2|E| = 3|V|$. Luego el segundo miembro debe ser par, y por tanto $|V|$ debe ser par.

B) Basta probar que para cada $k \geq 2$ existe un grafo cúbico conexo de orden $n = 2k$ que tiene al menos dos aristas que sin un vértice común. Procedamos por inducción completa sobre $k \geq 2$. El paso base es cierto, pues K_4 es cúbico conexo, y tiene dos aristas que no comparten vértice. Supongamos que $G = (V, E)$ es un grafo cúbico conexo con $2h$ vértices que tiene dos aristas $e_1 = (x_1, y_1)$ y $e_2 = (x_2, y_2)$ sin vértices en común (es decir, los vértices x_1, y_1, x_2, y_2 son distintos). Vamos a probar que existe un grafo con $2h + 2$ vértices que cumple con el enunciado. Sean u_1, u_2 dos nuevos vértices ($u_1, u_2 \notin V$) y considérese el nuevo grafo $G' = (V', E')$, siendo $V' = V \cup \{u_1, u_2\}$ y $E' = E - \{e_1, e_2\} \cup \{(u_1, u_2), (u_1, x_1), (u_1, y_1), (u_2, x_2), (u_2, y_2)\}$. Se comprueba que $|V'| = 2h + 2 = 2(h + 1)$. Además, los nuevos vértices u_1 y u_2 tienen grado 3, mientras que el grado de los vértices del conjunto V no fue alterado. El nuevo grfo G' también es conexo. Luego, G' cumple con las condiciones del enunciado, y existen infinitos grafos cúbicos conexos.