Solución al examen propuesto el dia 3 de febrero de 2015

Curso de Matemática Discreta 1

1. El desarrollo de $(1-x)^{-k}$ es $\sum_{r=0}^{+\infty}\binom{-k}{r}(-x)^r$ que es $\sum_{r=0}^{+\infty}\binom{k+r-1}{r}x^r$ (ver Grimaldi, sección 9.2). Puesto que $\binom{k+r-1}{r} = CR(k,r)$, tenemos $(1-x)^{-k} = \sum_{r=0}^{+\infty} CR(k,r)x^r$.

   En particular, $(1-x)^{-1} = \sum_{r=0}^{+\infty} x^r$. Multiplicando las funciones generatrices generamos el producto de convolución de las dos series, cuyo término de grado n es $(\sum_{r=0}^{k} CR(k,r))x^n$, que es la sucesión pedida.

   Luego, la respuesta correcta es $(1-x)^{-(k+1)} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

2. Fijados $a, b \in \mathbb{N}$, se tiene que $a \leq b$ si y sólo si existe un único natural $h \geq 0$ tal que $a + h = b$ $(h = b - a)$. Entonces, podemos contar las soluciones del problema original agregando una variable x_5 y contando las soluciones naturales de $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 42$. Usando el razonamiento estándar visto en el curso (ver Grimaldi, sección 1.4, ejemplo 1.27 y siguientes), la cantidad de soluciones es C^{46}_{42}.

3. El enunciado del problema establece las siguientes restricciones:

   (a) $f(a) \in \{1,2,4,5\}$

   (b) $f(b)$ está determinado por $f(c)$.

   (c) La ecuación $f(b) = f(c) - 1$ implica que $f(c) \in \{2,5,6\}$ (porque $f(b) \neq 0, f(c) \neq 3, f(b) \neq 3$).

   (d) $f(d), f(e) \in \{1,2,4,5,6\}$.

   Contando posibilidades para cada valor funcional y aplicando la regla del producto, tenemos: $4 \times 3 \times 5 \times 5 = 300$ posibilidades de definir f.

4. Las raíces de la ecuación característica asociada son $(1 \pm i\sqrt{3})$. Entonces $\{(1+i\sqrt{3})^n; (1-i\sqrt{3})^n\}$ constituye una base del $\mathbb{C}$-espacio vectorial de soluciones de la ecuación homogénea asociada. Escribiendo las raíces en coordenadas polares, las soluciones reales de la ecuación homogénea asociada son de la forma $\alpha(2^n)\cos(n\pi/3) + \beta(2^n)\sin(n\pi/3)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (ver Grimaldi, sección 10.2, ejemplos 10.16, 10.17, 10.18).

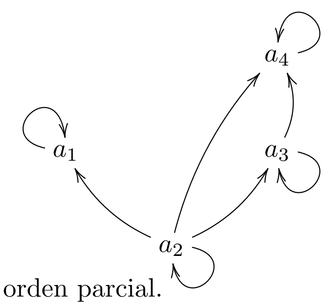
   Para hallar todas las soluciones de la ecuación no homogénea, sólo resta hallar una solución particular de la ecuación no homogénea. Puesto que

2^n no es solución de la ecuación homogénea, sabemos que existe una constante A tal que $A.2^n$ es una solución de la ecuación no homogénea (ver Grimaldi, sección 10.3, ejemplo 10.22 y tabla 10.2). Se verifica directamente que $\frac{1}{4}2^n$ es una solución particular de la ecuación no homogénea. Entonces, las soluciones reales de la ecuación no homogénea son de la forma $\alpha(2^n)\cos(n\pi/3) + \beta(2^n)\sin(n\pi/3) + \frac{1}{4}2^n$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Al imponer que la solución satisfaga $a_0 = 0, a_1 = 1$ se despejan α y β, concluyendo así que la respuesta correcta es

$$a_n = -\frac{1}{4}(2^n)\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}(2^n)\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{1}{4}2^n$$

5. De la matriz se deduce que la relación es el siguiente grafo dirigido:



que corresponde a un orden parcial.

6. La base inductiva es $n = 1$. Para $n = 1$ la desigualdad a verificar es $\frac{1}{1} \leq 2 - \frac{1}{1}$, que es evidente. Paso inductivo: Admitiendo la desigualdad para n, tenemos: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad + \quad \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$.

Basta entonces con probar $2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$ para todo natural n diferente de 0. Tenemos las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}
2 - \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \tfrac{1}{n+1} \quad &\Leftrightarrow \\
\tfrac{1}{(n+1)^2} + \tfrac{1}{n+1} \leq \tfrac{1}{n} \quad &\Leftrightarrow \\
\tfrac{n+2}{(n+1)^2} \leq \tfrac{1}{n} \quad &\Leftrightarrow \\
n(n+2) \leq (n+1)^2 \quad &\Leftrightarrow \\
n^2 + 2n \leq n^2 + 2n + 1 \quad &\Leftrightarrow \\
0 \leq 1 \quad &
\end{aligned}$$

Siendo la última desigualdad evidente.

7. Observación general: dado que en el alfabeto las letras aparecen una vez sola, las palabras `SOPA` y `PARTE` pueden aparecer a la vez en una permutación del alfabeto únicamente formando la palabra `SOPARTE`.

(a) El problema se reformula como el conteo de las permutaciones que contienen `SOPARTE` y `FIN`. Estas dos palabras dejan fuera 17 letras para permutar. Entonces, entre las 17 letras y las dos palabras, hay 19 objetos a permutar. La respuesta es 19!.

(b) Aplicamos el principio de inclusión/exclusión. Llamémosle c_1, c_2 y c_3 respectivamente a las conjuntos de permutaciones del alfabeto que *contienen la palabra* `FIN`, *la palabra* `SOPA` y *la palabra* `PARTE`. Entonces, (ver sección 8.1 de Grimaldi) la respuesta se obtiene calculando

$$27! - (|c_1| + |c_2| + |c_3|) + (|c_1 \cap c_2| + |c_1 \cap c_3| + |c_2 \cap c_3|) - |c_1 \cap c_2 \cap c_3|$$ [1]

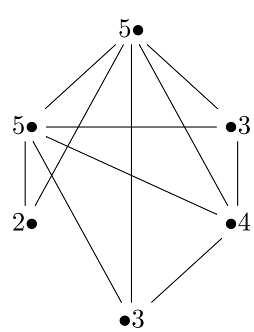
Siguiendo el mismo razonamiento que en la parte anterior, calculamos:

$$\begin{array}{rcl} |c_1| & = & 25! \\ |c_2| & = & 24! \\ |c_3| & = & 23! \\ |c_1 \cap c_2| & = & 22! \\ |c_1 \cap c_3| & = & 21! \\ |c_2 \cap c_3| & = & 21! \\ |c_1 \cap c_2 \cap c_3| & = & 19! \text{ (parte anterior)} \end{array}$$

El resultado es $27! - 23!(625) + 21!(24) - 19!$. Sacando 19! de factor común, tenemos:

$$19![20.21.22.23.24.25.26.27 - 20.21.22.23.25^2 + 20.21.24 - 1] = \\ 19![20.21\big(22.23.25(16823) + 24\big) - 1]$$

8. (a) Si, existe:



(b) No. Una justificación es la siguiente: Supongamos que un tal grafo existe. Tenemos dos vértices de grado 5, es decir, que están conectados con todos los demás. Los restantes vértices tienen grado mayor o igual a dos. Pero sabemos que hay dos cuyo grado es exactamente

[1] $|c_1|$ en Grimaldi se denota como $N(c_1)$, $|c_1 \cap c_2|$ como $N(c_1, c_2)$, etc.

2, luego, no están conectados con ningún otro. Quedan dos vértices más, que a lo sumo se pueden contectar entre sí, teniendo entonces a lo sumo grado 3. Absurdo.