Matemática Discreta I (2014)

Solución del examen de diciembre

Ejercicio 1. ¿Cuántas palabras distintas de 10 letras se pueden formar con las letras de la palabra `MATEMATICA` de forma tal que alternen vocales y consonantes?

Solución. La palabra puede comenzar con vocal o consonante. En cada caso debemos considerar:

- Las disposiciones de las 5 consonantes, 2 $\boxed{\texttt{M}}$, 2 $\boxed{\texttt{T}}$, 1 $\boxed{\texttt{C}}$, que son $\frac{5!}{2!\cdot 2!} = 5 \cdot 3 \cdot 2$.
- Las disposiciones de las 5 vocales, 3 $\boxed{\texttt{A}}$, 1 $\boxed{\texttt{E}}$, 1 $\boxed{\texttt{I}}$, que son $\frac{5!}{3!} = 5 \cdot 2^2$.

Por la regla del producto, la cantidad total de palabras es $2 \cdot (5 \cdot 3 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 2^2) = 5^2 \cdot 3 \cdot 2^4$

Ejercicio 2. Determinar la cantidad de enteros positivos menores o iguales a 500 que no son múltiplos ni de 3, ni de 7, ni de 11.

Solución. Usamos el principio de inclusión-exclusión, donde las condiciones c_1, c_2 y c_3 vienen dadas por "ser múltiplo de 3", "ser múltiplo de 7", y "ser múltiplo de 11", respectivamente (dentro del universo de opciones posibles que consiste en los enteros positivos menores o iguales a 500). Con las notaciones usuales la cantidad pedida queda:

$$\begin{aligned}\overline{N} &= N - (N(c_1) + N(c_2) + N(c_3)) + (N(c_1, c_2) + N(c_1, c_3) + N(c_2, c_3)) - N(c_1, c_2, c_3) \\ &= 500 - (166 + 71 + 45) + (23 + 15 + 6) - 2 = 260\end{aligned}$$

Ejercicio 3. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

con $x_i \in \{0, 1, \ldots, 8\}$?

Solución. Si los x_i pudieran tomar valores entre 0 y 10, la cantidad de soluciones sería $CR(4, 10) = C(13, 10) = \frac{13!}{10!\cdot 3!} = \frac{13\cdot 12\cdot 11}{6} = 286$. A este número hay que restar las soluciones que incluyen un 9 o un 10. En el primer caso, necesariamente uno de los valores será 9, uno 1, y los otros dos 0, de modo que hay $4 \cdot 3 = 12$ soluciones que descontar. En el segundo caso, necesariamente uno de los valores será 10 y los otros tres 0, de modo que hay 4 soluciones que descontar.

Por lo tanto, la cantidad de soluciones es $286 - 12 - 4 = 270$.

Ejercicio 4. Determinar los primeros 6 valores de la sucesión asociada a la función generatriz $f(x) = \frac{3x^2-1}{(1-x)^4}$.

Solución. El coeficiente n-ésimo de $\frac{1}{(1-x)^4}$ es $CR(4, n)$. Por tanto, el coeficiente n-ésimo de $\frac{3x^2-1}{(1-x)^4}$ es $a(n) = 3\,CR(4, n-2) - CR(4, n)$. Usando la fórmula $CR(4, n) = C(n+3, n) = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$ podemos hacer una tabla:

n	0	1	2	3	4	5
u = CR(4,n)	1	4	10	20	35	56
v = CR(4,n-2)			1	4	10	20
a(n) = 3v-u	-1	-4	-7	-8	-5	4

Entonces los primeros coeficientes son $-1, -4, -7, -8, -5, 4$.

Solución (alternativa). Consideramos $f(x) = \alpha + \beta x + \cdots$. Calculamos $\alpha = f(0) = -1$. Ahora podemos calcular β evaluando $\frac{f(x)+1}{x} = \frac{x^3-4x^2+9x-4}{(1-x)^4}$ en $x = 0$, obteniendo $\beta = -4$. Entonces la sucesión asociada a $f(x)$ comienza con $-1, -4, \ldots,$ y entre las opciones ofrecidas solamente hay una que comienza así.

Ejercicio 5. Sea $A = \{1, \ldots, 7\}$. Se recuerda que un *punto fijo* de una función $f : A \to A$ es cualquier elemento $x \in A$ tal que $f(x) = x$. ¿Cuántas biyecciones $f : A \to A$ tienen un número par de puntos fijos?

Solución. La cantidad de biyecciones con 0 puntos fijos es igual al número de desordenes d_7.

La cantidad de biyecciones con 2 puntos fijos puede calcularse de la siguiente forma: en primer lugar observamos que hay $C(7, 2)$ opciones para los puntos fijos. Determinados los dos puntos fijos, la cantidad de biyecciones es igual al número de desordenes d_5. En definitiva, la cantidad de biyecciones con 2 puntos fijos es $C(7, 2) \cdot d_5$.

Del mismo modo se ve que la cantidad de biyecciones con 4 puntos fijos es $C(7, 4) \cdot d_3$, y la cantidad de biyecciones con 6 puntos fijos es $C(7, 6) \cdot d_1$.

Ahora, por la regla de la suma, la cantidad de biyecciones con un número par de puntos fijos es $d_7+C(7, 2)\cdot d_5+C(7, 4)\cdot d_3+C(7, 6)\cdot d_1 = 1854+21\cdot 44+35\cdot 2+7\cdot 0 = 2848$.

Ejercicio 6. Resolver la ecuación en recurrencia

$$a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 12n \times 3^n$$

con los valores iniciales $a_0 = a_1 = 1$

Solución. La ecuación característica es $r^2 + r - 6 = 0$, que tiene raices $r = 2$ y $r = -3$. Por lo tanto la solución general a la ecuación homogénea es

$$c_1\, 2^n + c_2\, (-3)^n \; .$$

Ahora buscamos una solución particular a la ecuación no homogénea; como 3^n no es solución de la homogénea buscamos una solución de la forma $(An + B)\, 3^n$. Sustituyendo la expresión en la ecuación no homogénea resulta

$$(A(n + 2) + B)\, 3^{n+2} + (A(n + 1) + B)\, 3^{n+1} - 6(An + B)\, 3^n = 12n \times 3^n \; ,$$

que se simplifica, dividiendo entre 3^n, como $6An + (21A + 6B) = 12n$. Luego $6A = 12$ y $21A + 6B = 0$, de donde $A = 2$ y $B = -7$, y la solución general a la ecuación no homogénea es

$$c_1\, 2^n + c_2\, (-3)^n + (2n - 7)\, 3^n \; .$$

Ahora consideramos las condiciones iniciales

$$a_0 = c_1 + c_2 - 7 = 1 \qquad \text{y} \qquad a_1 = 2c_1 - 3c_2 - 15 = 1 \ .$$

Resolviendo el sistema tenemos $c_1 = 8$ y $c_2 = 0$, y por lo tanto la solución es

$$a_n = 8 \cdot 2^n + (2n - 7)\, 3^n \ .$$

Ejercicio 7. Decimos que un grafo (o un árbol) G es *super* si la cantidad de vértices de grado par es el doble de la cantidad de vértices de grado impar.

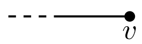
a. Probar que si G es un grafo super con n vértices, entonces n es múltiplo de 6.

b. Probar que para cada entero $k \geq 1$, existe un árbol super con $6k$ vértices, que tiene $k + 1$ vértices de grado 1, $k - 1$ vértices de grado 3, y $4k$ vértices de grado 2.

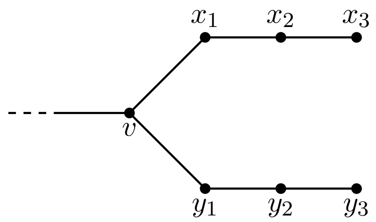
Solución.

a. Sea G un grafo super con n vértices. Recordar que la cantidad de vértices de grado impar es par, digamos $2k$. Como G es super, la cantidad de vértices de grado par es $4k$, entonces $n = 6k$.

b. Para $k = 1$ podemos considerar el camino simple P_6, que tiene 2 vértices de grado 1 y 4 vértices de grado 2. Ahora supongamos dado un árbol super T_k con $6k$ vértices que cumple lo pedido. Consideramos un vértice $v \in T_k$ de grado 1:



Ahora podemos construir T_{k+1} agregando 6 vértices $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ conectados con v como muestra el dibujo.



Vemos que la cantidad de vértices de grado 1 aumenta 1 (se agregan x_3, y_3 y deja de ser de grado 1 el vértice v), la cantidad de vértices de grado 3 también aumenta 1 (el vértice v) y la cantidad de vértices de grado 2 aumenta 4 (x_1, x_2, y_1, y_2). Es claro que T_{k+1} es árbol y cumple con lo pedido.

Ejercicio 8. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Se recuerda que una función $f : X \to X$ es *creciente* cuando para todos $x, y \in X$, $x \leq y$ implica $f(x) \leq f(y)$. En lo siguiente, se escribe A el conjunto (finito) de todas las funciones crecientes $f : X \to X$, y se define la relación binaria $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ por

$$f\mathcal{R}g \Longleftrightarrow \forall x \in X. f(x) \geq g(x)$$

(para todos $f, g \in A$).

a. Demostrar que $\mathcal{R}$ es un orden parcial en A.
b. Indicar si $(A, \mathcal{R})$ es un orden total, justificando la respuesta.
c. Indicar si A tiene máximo y mínimo, justificando la respuesta.
d. Demostrar que $(A, \mathcal{R})$ es un retículo.
e. Determinar el cardinal del conjunto finito A.

Solución.

a. *Reflexiva:* claramente $f(x) \geq f(x)$ para todo $x \in X$.

   Antisimétrica: si $f(x) \geq g(x)$ y $g(x) \geq f(x)$ para todo $x \in X$, entonces $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$, es decir $f = g$.

   Transitiva: supongamos $f(x) \geq g(x)$ y $g(x) \geq h(x)$ para todo $x \in X$. Entonces $f(x) \geq h(x)$ para todo $x \in X$.

b. Por ejemplo, las funciones f y g dadas por

n	1	2	3	4	5
f(n)	1	2	3	4	5
g(n)	1	1	1	5	5

   no son comparables, de modo que $(A, \mathcal{R})$ no es un orden total.

c. La función constante 5 es creciente y es mayor a cualquier función en A. Del mismo modo la función constante 1 es creciente y es menor a cualquier función en A.

d. Dados $f, g \in A$, la función h dada por $h(x) = \max(f(x), g(x))$ es el supremo de $\{f, g\}$, y la función k dada por $k(x) = \min(f(x), g(x))$ es el ínfimo de $\{f, g\}$.

e. Dada $f \in A$, consideramos los valores $x_1 = f(1) - 1$, $x_2 = f(2) - f(1)$, $x_3 = f(3) - f(2)$, $x_4 = f(4) - f(3)$, $x_5 = f(5) - f(4)$, y $x_6 = 5 - f(5)$. Entonces $x_i \geq 0$ son enteros tales que $x_1 + \cdots + x_6 = 4$, y es claro que las soluciones a dicha ecuación están en biyección con las funciones en A. Entonces el cardinal de A es $CR(6, 4) = C(9, 4) = \frac{9!}{5! \cdot 4!} = 126$.