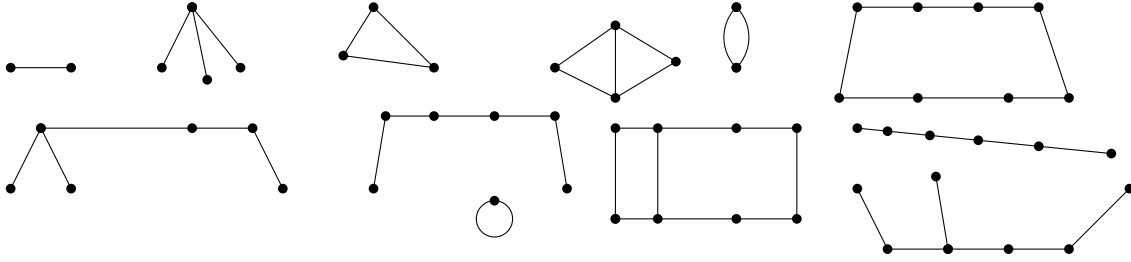


## Práctico 11: Grafos (Planaridad).

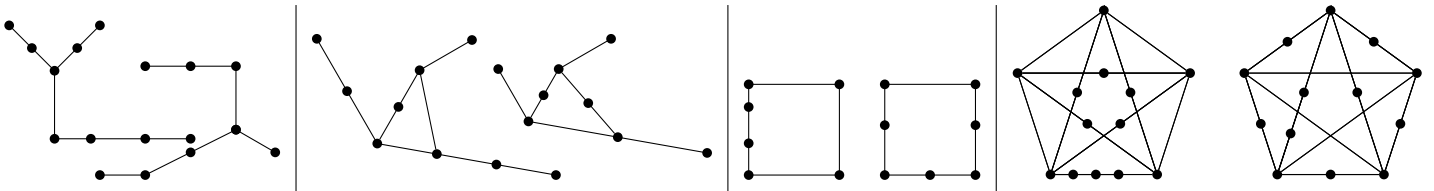
Ref. Grimaldi 11.4

**Ejercicio 1** Dibuje una inmersión en el plano de  $K_4$ , otra del cubo y otra de  $K_{2,8}$ .

**Ejercicio 2** Indique cuales de los multigrafos de la figura son homeomorfos:



**Ejercicio 3** Para los pares de grafos homeomorfos de la figura obtenga un tercero desde el cual los dos primeros se obtengan por subdivisiones elementales.



**Ejercicio 4 a.** ¿Cuántos subgrafos homeomorfos a  $K_2$  tiene  $C_4$ ?

**b.** ¿Cuántos subgrafos homeomorfos a  $K_{1,3}$  tiene  $W_4$ ? ( $W_n$  son los grafos ruedas definidos en el Ej. 6 del Práctico 9).

**c.** ¿Cuántos subgrafos homeomorfos a  $K_2$  tiene un árbol de orden  $n$ ?

**Ejercicio 5** Muestre que si se elimina cualquier arista de  $K_5$ , el subgrafo resultante es plano. ¿Es esto cierto para el grafo  $K_{3,3}$ ?

**Ejercicio 6** (2<sup>do</sup> parcial junio 2017 Ej. Des. 1) Probar que todo grafo acíclico es plano.

**Ejercicio 7** Determine cuáles de los grafos de la Figura 1 son planos. Si un grafo es plano, vuelva a dibujarlo sin aristas solapadas. Si no es plano, encuentre un subgrafo homeomorfo a  $K_5$ , o  $K_{3,3}$ .

**Ejercicio 8** Sea  $G = (V, E)$  un grafo no plano. ¿Cuál es el valor más pequeño que puede tener  $|E|$ ?

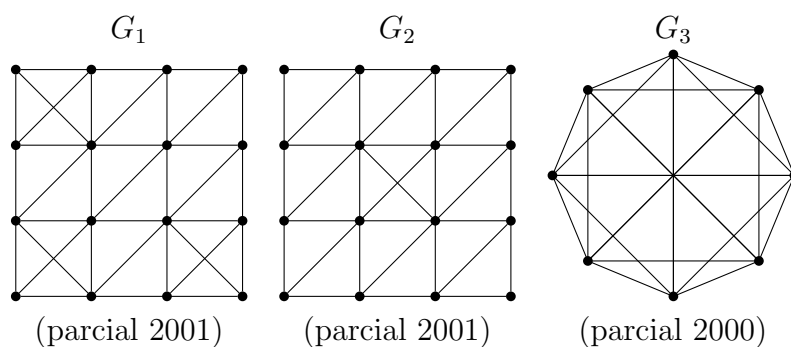


Figura 1: del Ejercicio 7

**Ejercicio 9** Determine el número de vértices, aristas y regiones para cada uno de los grafos planos de la Figura 1. Luego muestre que sus respuestas satisfacen el teorema de Euler para grafos planos conexos.

**Ejercicio 10** ¿Cuántas aristas tiene un grafo conexo 3-regular plano sin lazos y con ocho vértices? Dibuje un grafo que satisfaga dichas condiciones y otro que las satisfaga todas menos la de ser plano.

- Ejercicio 11**
- a. Demuestre que todo grafo plano tiene un vértice de grado 5 o menor.
  - b. Demuestre que todo grafo plano con menos de 30 aristas tiene un vértice de grado 4 o menor.
  - c. Demuestre que en toda inmersión de un grafo plano y conexo con 6 vértices y 12 aristas, cada una de las regiones está limitada por 3 aristas.
  - d. Demuestre que para todo grafo conexo  $G$  con 11 o más vértices, o bien él o su complemento  $\overline{G}$  no es plano.

**Ejercicio 12** Sea  $G = (V, E)$  un grafo plano y cuyas inmersiones planas determinan 53 regiones. Si para alguna inmersión plana de  $G$  cada región tiene al menos cinco aristas en su frontera, demuestre que  $|V| \geq 82$ .

### EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

**Ejercicio 13** Sea  $G = (V, E)$  un grafo plano 4-regular conexo sin lazos. Si  $|E| = 16$ , ¿cuántas regiones hay en una representación plana de  $G$ ?

**Ejercicio 14** Suponga que  $G = (V, E)$  es un grafo plano con  $k$  componentes conexas sin lazos con  $|V| = v, |E| = e$ . Establezca y demuestre una extensión del teorema de Euler para este grafo.