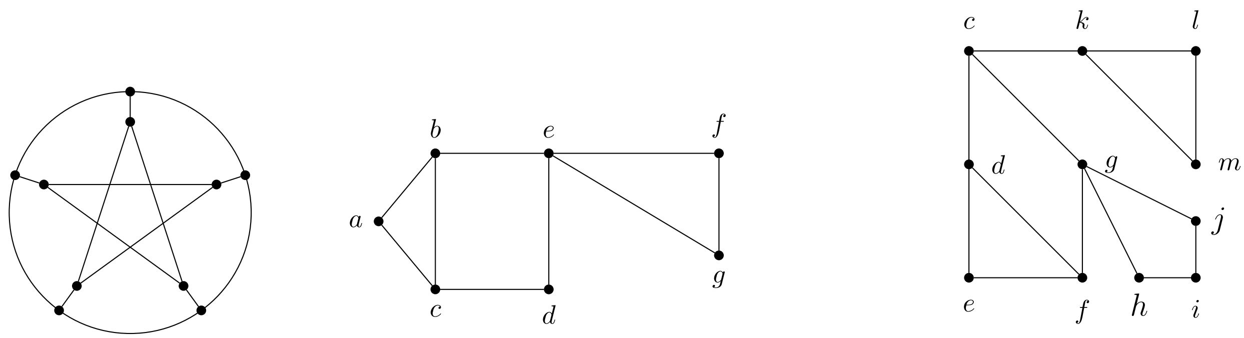
Práctico 9: Grafos: caminos, recorridos, circuitos, conexión, subgrafos.

Ref. Grimaldi 11.1, 11.2

Algunas definiciones y suposiciones

Todos los grafos se supondrán simples, es decir, sin artistas múltiples ni lazos. El grafo *completo* K_n tiene n vértices todos unidos entre sí. El *bipartito completo* $K_{n,m}$ tiene $n+m$ vértices n de los cuales están unidos a los otros m, y esas son las únicas adyacencias. El *camino simple* P_n tiene n vértices y todo él es un camino simple. El n*–ciclo* C_n tiene n vértices y todo él es un ciclo. El grafo de *Petersen* es el de la Figura 1 (i). Un grafo es un *árbol* si es conexo y no tiene ciclos.



(i) Grafo de Petersen (ii) (iii)

Figura 1:

La *distancia* entre dos vértices a y b de un grafo conexo es la menor de las longitudes de los caminos que los unen. Por ejemplo, la distancia entre el vértice c y el vértice m del grafo de la Figura 1 (i) es 2. El *diámetro* de un grafo conexo es la mayor de las distancias entre dos vértices cualesquiera. Por ejemplo, el diámetro de P_4 es 3 y el de C_5 es 2.

Ejercicio 1 Para el grafo de la Figura 1 (ii), determine:

- **a**. Un camino que no sea un recorrido.
- **b**. Un recorrido que no sea simple.
- **c**. Un camino simple de b a d.
- **d**. Un camino cerrado que no sea un circuito.
- **e**. Un circuito que no sea simple.
- **f**. Todos los circuitos simples que pasan por b.
- **g**. Todos los recorridos simples de b a f.

Ejercicio 2

- **a**. ¿Cuál es la distancia entre el vértice d y los demás vértices del grafo de la Figura 1 (iii)?

b. Halle el diámetro de K_n, $K_{n,m}$, P_n, C_n y el grafo de Petersen (Figura 1(i)).

Ejercicio 3 ¿Cuántos caminos simples tiene P_4? ¿y $K_{1,4}$? ¿y P_n? ¿y $K_{1,n}$?

Ejercicio 4 (1^{er} parcial de junio de 2017 Ej1 MO) Sean x e y dos vértices adyacentes de C_{20}. ¿Cuántos caminos de largo 11 empiezan en x y terminan en y?

Ejercicio 5 ¿Cuántos caminos de largo n hay entre dos vértices opuestos de C_4?

Ejercicio 6 Para cada natural $n \geq 3$ se define el grafo *rueda de n rayos* como el grafo W_n con $n+1$ vértices v_0, v_1, ..., v_n tal que v_0 es adyacente a todos los demás vértices y $v_1, \ldots, v_n, v_1$ es un ciclo. En la Figura 2 se muestra W_3, W_4 y W_5.

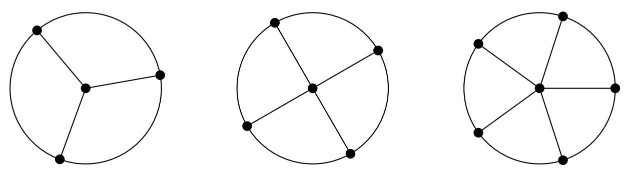


Figura 2:

a. ¿Cuántas aristas tiene W_n?

b. ¿Cuántos 3-ciclos tiene W_3? ¿y W_4?

c. ¿Cuántos 4-ciclos tienen W_3, W_4 y W_5?

d. Ídem para 5-ciclos.

e. Ídem para 6-ciclos.

f. Determine cuántos k-ciclos tiene W_n.

Ejercicio 7 Pruebe que dos recorridos simples de longitud la mayor posible, en un grafo conexo, poseen un vértice en común.

Ejercicio 8 Sea G el grafo con conjunto de vértices $\{1, 2, \ldots, 15\}$ donde el vértice i es adyacente al j si y solo si su máximo común divisor es mayor que 1. ¿Cuántas componentes conexas tiene G?

Ejercicio 9 Encuentre un grafo G que tenga tres vértices u, v y w tales que

$$\kappa(G-u) = \kappa(G), \qquad \kappa(G-v) > \kappa(G), \qquad \kappa(G-w) < \kappa(G).$$

Ejercicio 10 Un hombre debe cruzar un perro, una oveja y una bolsa de repollos, a la otra margen del río, por medio de una canoa. El tamaño de la canoa no permite llevar más de un objeto a la vez. Además, no se puede dejar al perro sólo con la oveja ni a la oveja sola con la bolsa de repollos.

a. ¿Cómo se podrá hacer?

b. ¿Puede el hombre realizar el proceso si ha de hacer exactamente 20 viajes? (Un viaje es ir de una margen del río a la otra).

Sugerencia: asociar a cada disposición factible un vértice y unir dos vértices si se puede pasar de dicha disposición a la otra en un solo viaje.

Ejercicio 11 Sea G el grafo de la Figura 3 (a).

a. ¿Cuántos subgrafos conexos de G tienen 4 vértices e incluyen un ciclo?

b. Describa los subgrafos G_1 y G_2 de G (Figura 3 (b)) como subgrafos inducidos y en términos de la eliminación de vértices de G.

c. Trace el subgrafo de G inducido por el conjunto de vértices $U = \{b, c, d, f, i, j\}$.

d. Sean e_1 y e_2 las artistas $\{a, c\}$ y $\{a, d\}$ respectivamente del grafo G. Trace los siguientes subgrafos de G: (i) $(G - e_1) - e_2$; (ii) $(G - e_2) - e_1$; (iii) $G - \{e_1, e_2\}$.

e. Encuentre un subgrafo de G que no sea inducido.

f. ¿Qué condición o condiciones debe cumplir un subgrafo para no ser inducido?

g. ¿Cuántos subgrafos recubridores tiene G?

h. ¿Cuántos de los subgrafos anteriores son conexos?

i. ¿cuántos subgrafos de la parte **h.** tienen el vértice a como vértice aislado?

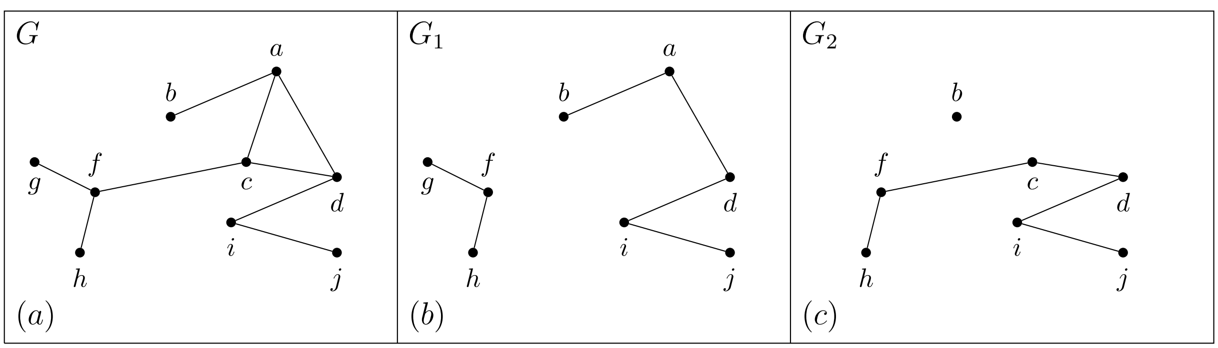


Figura 3:

Ejercicio 12 (Examen marzo 2001)

El hipercubo H_n de dimensión n, es el grafo cuyos vértices son las n-uplas de ceros y unos, tales que dos n-uplas son adyacentes si coinciden en todas sus coordenadas salvo exactamente en una de ellas, por ejemplo $(0, 0, \ldots, 0)$ es adyacente a $(1, 0, \ldots, 0)$ pero no a $(1, 0, \ldots, 0, 1)$.

a. Halle los conjuntos de vértices de H_1, H_2, H_3 y dibuje dichos grafos.

b. ¿Cuántos vértices y aristas tiene H_n?

c. Halle 2 caminos simples en H_5 de $(0, 0, 1, 1, 0)$ a $(0, 0, 0, 1, 0)$.

d. Demuestre que H_n no tiene 3–ciclos.

e. ¿Cuántos 4–ciclos tiene H_n? (*Sugerencia*: cuente cuántos 4–ciclos pasan por un vértice fijo.)

Ejercicios Complementarios

Ejercicio 13 Determine si se cumple o no que K_4 contenga:

a. un camino que no es un recorrido.

b. un recorrido que no es ni un circuito ni es simple.

c. un circuito que no es simple.

Ejercicio 14 (1^{er} parcial-examen 2002) ¿Cuántos caminos simples de longitud 2 tiene K_{12}?

Ejercicio 15 (2^{do} examen 2003)
Halle el mínimo número de aristas que hay que quitarle a K_6 para que quede desconectado en dos componentes conexas, ninguna de las cuales sea un vértice aislado.

Ejercicio 16 Sea G_n el grafo con vértices las n-uplas de 0s y 1s:

$$V(G_n) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \{0, 1\}\}$$

Dos n-uplas serán adyacentes si difieren en los valores de exactamente dos de sus posiciones, coincidiendo en el resto. Por ejemplo, en G_n, $(0, 0, 1)$ es adyacente a $(1, 1, 1)$ y a $(1, 0, 0)$, pero no a $(1, 1, 0)$.

a. Dibuje G_2, G_3 y G_1.

b. ¿Para qué valores de n es G_n conexo?

c. ¿Cuántas componentes conexas tiene G_n?

Sugerencia: sume los 1s de cada vértice.