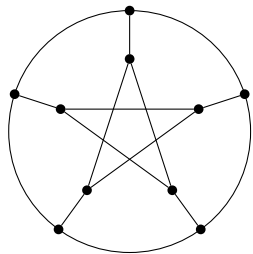


## Práctico 9: Grafos: caminos, recorridos, circuitos, conexión, subgrafos.

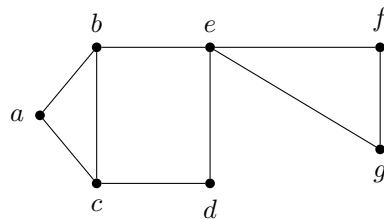
Ref. Grimaldi 11.1, 11.2

### ALGUNAS DEFINICIONES Y SUPOSICIONES

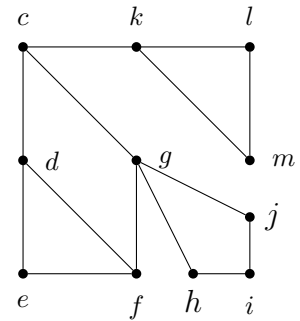
Todos los grafos se supondrán simples, es decir, sin artistas múltiples ni lazos. El grafo *completo*  $K_n$  tiene  $n$  vértices todos unidos entre sí. El *bipartito completo*  $K_{n,m}$  tiene  $n + m$  vértices  $n$  de los cuales están unidos a los otros  $m$ , y esas son las únicas adyacencias. El *camino simple*  $P_n$  tiene  $n$  vértices y todo él es un camino simple. El  $n$ -*ciclo*  $C_n$  tiene  $n$  vértices y todo él es un ciclo. El grafo de *Petersen* es el de la Figura 1 (i). Un grafo es un *árbol* si es conexo y no tiene ciclos.



(i) Grafo de Petersen



(ii)



(iii)

Figura 1:

La *distancia* entre dos vértices  $a$  y  $b$  de un grafo conexo es la menor de las longitudes de los caminos que los unen. Por ejemplo, la distancia entre el vértice  $c$  y el vértice  $m$  del grafo de la Figura 1 (i) es 2. El *diámetro* de un grafo conexo es la mayor de las distancias entre dos vértices cualesquiera. Por ejemplo, el diámetro de  $P_4$  es 3 y el de  $C_5$  es 2.

**Ejercicio 1** Para el grafo de la Figura 1 (ii), determine:

- |  |   |
|--|---|
| a. Un camino que no sea un recorrido.        | e. Un circuito que no sea camino simple.    |
| b. Un recorrido que no sea camino simple.    | f. Todos los ciclos que pasan por $b$ .     |
| c. Un camino simple de $b$ a $d$ .           | g. Todos los caminos simples de $b$ a $f$ . |
| d. Un camino cerrado que no sea un circuito. |   |

**Ejercicio 2**

- a. ¿Cuál es la distancia entre el vértice  $d$  y los demás vértices del grafo de la Figura 1 (iii)?

b. Halle el diámetro de  $K_n$ ,  $K_{n,m}$ ,  $P_n$ ,  $C_n$  y el grafo de Petersen (Figura 1(i)).

**Ejercicio 3** ¿Cuántos caminos simples tiene  $P_4$ ? ¿Y  $K_{1,4}$ ? ¿Y  $P_n$ ? ¿Y  $K_{1,n}$ ?

**Ejercicio 4** (1<sup>er</sup> parcial de junio de 2017 Ej1 MO) Sean  $x$  e  $y$  dos vértices adyacentes de  $C_{20}$ . ¿Cuántos caminos de largo 11 empiezan en  $x$  y terminan en  $y$ ?

**Ejercicio 5** ¿Cuántos caminos de largo  $n$  hay entre dos vértices opuestos de  $C_4$ ?

**Ejercicio 6** Para cada natural  $n \geq 3$  se define el grafo *rueda de  $n$  rayos* como el grafo  $W_n$  con  $n + 1$  vértices  $v_0, v_1, \dots, v_n$  tal que  $v_0$  es adyacente a todos los demás vértices y  $v_1, \dots, v_n, v_1$  es un ciclo. En la Figura 2 se muestra  $W_3$ ,  $W_4$  y  $W_5$ .

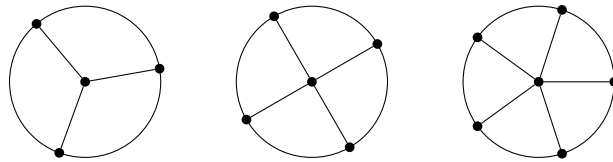


Figura 2:

- |   |  |
|---|--|
| a. ¿Cuántas aristas tiene $W_n$ ?                   | d. Ídem para 5-ciclos.                         |
| b. ¿Cuántos 3-ciclos tiene $W_3$ ? ¿Y $W_4$ ?       | e. Ídem para 6-ciclos.                         |
| c. ¿Cuántos 4-ciclos tienen $W_3$ , $W_4$ y $W_5$ ? | f. Determine cuántos $k$ -ciclos tiene $W_n$ . |

**Ejercicio 7** Pruebe que dos caminos simples de longitud la mayor posible, en un grafo conexo, poseen un vértice en común.

**Ejercicio 8** Sea  $G$  el grafo con conjunto de vértices  $\{1, 2, \dots, 15\}$  donde el vértice  $i$  es adyacente al  $j$  si y solo si su máximo común divisor es mayor que 1. ¿Cuántas componentes conexas tiene  $G$ ?

**Ejercicio 9** Encuentre un grafo  $G$  que tenga tres vértices  $u$ ,  $v$  y  $w$  tales que

$$\kappa(G - u) = \kappa(G), \quad \kappa(G - v) > \kappa(G), \quad \kappa(G - w) < \kappa(G).$$

**Ejercicio 10** Un hombre debe cruzar un perro, una oveja y una bolsa de repollos, a la otra margen del río, por medio de una canoa. El tamaño de la canoa no permite llevar más de un objeto a la vez. Además, no se puede dejar al perro sólo con la oveja ni a la oveja sola con la bolsa de repollos.

- a. ¿Cómo se podrá hacer?

- b. ¿Puede el hombre realizar el proceso si ha de hacer exactamente 20 viajes? (Un viaje es ir de una margen del río a la otra).

*Sugerencia:* asociar a cada disposición factible un vértice y unir dos vértices si se puede pasar de dicha disposición a la otra en un solo viaje.

**Ejercicio 11** Sea  $G$  el grafo de la Figura 3 (a).

- ¿Cuántos subgrafos conexos de  $G$  tienen 4 vértices e incluyen un ciclo?
- Describa los subgrafos  $G_1$  y  $G_2$  de  $G$  (Figura 3 (b)) como subgrafos inducidos y en términos de la eliminación de vértices de  $G$ .
- Trace el subgrafo de  $G$  inducido por el conjunto de vértices  $U = \{b, c, d, f, i, j\}$ .
- Sean  $e_1$  y  $e_2$  las aristas  $\{a, c\}$  y  $\{a, d\}$  respectivamente del grafo  $G$ . Trace los siguientes subgrafos de  $G$ : (i)  $(G - e_1) - e_2$ ; (ii)  $(G - e_2) - e_1$ ; (iii)  $G - \{e_1, e_2\}$ .
- Encuentre un subgrafo de  $G$  que no sea inducido.
- ¿Qué condición o condiciones debe cumplir un subgrafo para no ser inducido?
- ¿Cuántos subgrafos recubridores tiene  $G$ ?
- ¿Cuántos de los subgrafos anteriores son conexos?
- ¿cuántos subgrafos de la parte **h.** tienen el vértice  $a$  como vértice aislado?

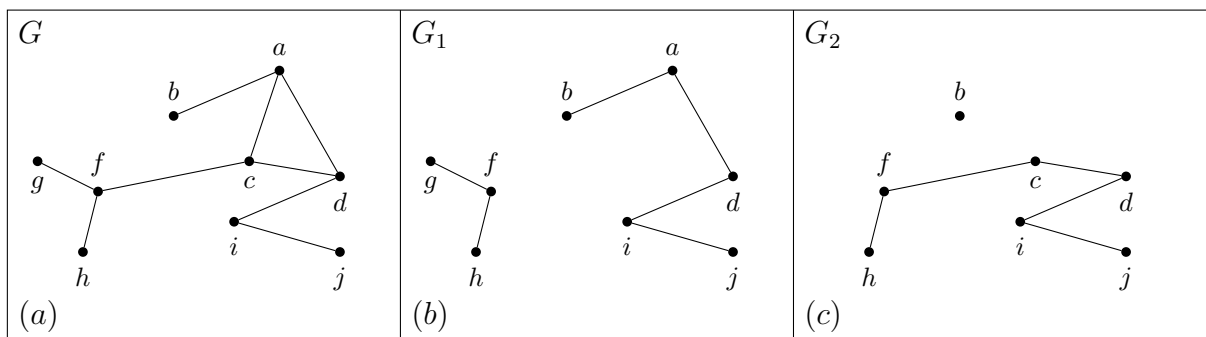


Figura 3:

**Ejercicio 12** (Examen marzo 2001)

El hipercubo  $H_n$  de dimensión  $n$ , es el grafo cuyos vértices son las  $n$ -uplas de ceros y unos, tales que dos  $n$ -uplas son adyacentes si coinciden en todas sus coordenadas salvo exactamente en una de ellas, por ejemplo  $(0, 0, \dots, 0)$  es adyacente a  $(1, 0, \dots, 0)$  pero no a  $(1, 0, \dots, 0, 1)$ .

- Halle los conjuntos de vértices de  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  y dibuje dichos grafos.
- ¿Cuántos vértices y aristas tiene  $H_n$ ?
- Halle 2 caminos simples en  $H_5$  de  $(0, 0, 1, 1, 0)$  a  $(0, 0, 0, 1, 0)$ .

- d. Demuestre que  $H_n$  no tiene 3-ciclos.
- e. ¿Cuántos 4-ciclos tiene  $H_n$ ? (*Sugerencia*: cuente cuántos 4-ciclos pasan por un vértice fijo.)

## EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

**Ejercicio 13** Determine si se cumple o no que  $K_4$  contenga:

- a. un camino que no es un recorrido.
- b. un recorrido que no es ni un circuito ni es camino simple.
- c. un circuito que no es camino simple.

**Ejercicio 14** (1<sup>er</sup> parcial-examen 2002) ¿Cuántos caminos simples de longitud 2 tiene  $K_{12}$ ?

**Ejercicio 15** (2<sup>do</sup> examen 2003)

Halle el mínimo número de aristas que hay que quitarle a  $K_6$  para que quede desconectado en dos componentes conexas, ninguna de las cuales sea un vértice aislado.

**Ejercicio 16** Sea  $G_n$  el grafo con vértices las  $n$ -uplas de 0s y 1s:

$$V(G_n) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \{0, 1\}\}$$

Dos  $n$ -uplas serán adyacentes si difieren en los valores de exactamente dos de sus posiciones, coincidiendo en el resto. Por ejemplo, en  $G_n$ ,  $(0, 0, 1)$  es adyacente a  $(1, 1, 1)$  y a  $(1, 0, 0)$ , pero no a  $(1, 1, 0)$ .

- a. Dibuje  $G_2$ ,  $G_3$  y  $G_1$ .
- b. ¿Para qué valores de  $n$  es  $G_n$  conexo?
- c. ¿Cuántas componentes conexas tiene  $G_n$ ?

*Sugerencia*: sume los 1s de cada vértice.