

Práctico 7: Relaciones (1^{ra} Parte).

Ref. Grimaldi 5.1, 7.1 y 7.2

Aclaración: En todos los ejercicios R^{-1} denota la relación inversa, i.e. $R^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in R\}$, y \overline{R} la relación complementaria, i.e., $\overline{R} = \{(x, y) : (x, y) \notin R\}$.

Ejercicio 1 Determine si las siguientes relaciones son reflexivas, *irreflexivas* ($\forall x, (x, x) \notin R$), simétricas, antisimétricas, *asimétricas* ($(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$) o transitivas en $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

a. $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$.

b. $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.

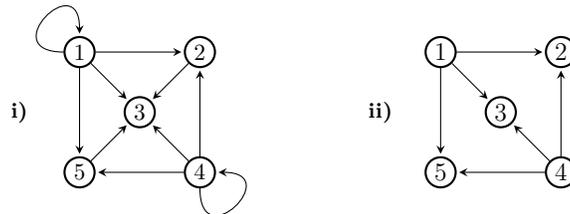
c. $R = \{(1, 3), (1, 1), (3, 1), (1, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.

d. $R = \emptyset$.

e. $R = A \times A$.

f. Las relaciones cuyas matrices son i) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

g. Para $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y las relaciones dadas por los grafos dirigidos siguientes



Ejercicio 2 Considere el conjunto de propiedades $P = \{\text{reflexiva, simétrica, transitiva}\}$. Para cada subconjunto T de P , exhiba un ejemplo de una relación que satisfaga las propiedades de T y no satisfaga las de $P \setminus T$.

Ejercicio 3 Sean R y S relaciones en un conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

a. Elabore un criterio para decidir si R es o no *simétrica* basándose en la matriz de R .

b. Si R y S son *simétricas*: ¿lo serán también \overline{R} , R^{-1} , $R \circ S$, $R \cup S$, $R \cap S$?

c. Ídem a los casos anteriores sustituyendo *simétrica* por *reflexivas*, *irreflexivas*, *antisimétricas*, *asimétricas* y *transitivas*.

Ejercicio 4 (Parcial 2000) Halle el número de relaciones R en el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ que verifican simultáneamente las tres condiciones siguientes: R es simétrica; $(a, b) \in R$; $(c, c) \in R$. Construya la matriz y el diagrama de flechas (o digrafo) de una de estas relaciones.

Ejercicio 5 ¿Cuántas relaciones binarias

- a. reflexivas, b. simétricas, c. asimétricas, d. antisimétricas

son definibles sobre un conjunto con n elementos?

Ejercicio 6 Para cada proposición sobre la relación R definida sobre un conjunto finito A , indique si es verdadera o falsa. Justifique

- a. Si R es reflexiva sobre A , entonces $|R| \geq n$.
b. Si $|R| \geq n^2 - k$, con $k < n$ entonces $\exists a \in A$ tal que $(a, a) \in R$.

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

Ejercicio 7 (Parcial 2001) Una relación R sobre un conjunto no vacío A es *compatible* si es reflexiva y transitiva. Considere las relaciones R^{-1} y $S = (R \circ R^{-1}) \cup (R^{-1} \circ R)$. Investigar si R^{-1} es compatible o un orden parcial, si S es simétrica, si S es irreflexiva y si $R \subseteq S$.

Ejercicio 8 Demuestre o halle un contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

- a. La composición de dos relaciones puede ser una función sin que ninguna de ellas lo sea.
b. La inversa de una relación puede ser una función sin que ella misma lo sea.
c. La composición de dos relaciones puede dar la relación vacía sin que ninguna de ellas lo sea

Ejercicio 9 Sea R relación reflexiva y simétrica; T relación desconocida, y S relación antisimétrica. Indique verdadero o falso, justifique:

- a. $R \circ R$ es reflexiva. d. $T \cap T^{-1}$ es reflexiva si y solo si T es reflexiva.
b. $R \circ R$ es simétrica. e. T^2 es simétrica si y solo si T es simétrica.
c. Si $S \circ R$ es simétrica entonces S es reflexiva.

Ejercicio 10 (Examen febrero de 2016 Ej2) Sean R y S relaciones sobre un conjunto A , con S reflexiva y antisimétrica. Decir cual de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

- a. $R \cap R^{-1}$ es relación simétrica, y es reflexiva si y solo si R lo es.
b. $R \circ S$ es reflexiva entonces R lo es.