Práctico 5: Funciones Generatrices.

Ref. Grimaldi 9.1 y 9.2

Ejercicio 1 Encuentre las funciones generatrices para las siguientes sucesiones (por ejemplo en el caso de la sucesión $1, 1, 1, \ldots$ la respuesta pedida es $1/(1-x)$ y no $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ ni $\sum x^i$).

a. $C_0^6,\ C_1^6,\ C_2^6, \ldots,\ C_6^6, \ldots$

b. $C_1^6,\ 2C_2^6, \ldots,\ 6C_6^6, \ldots$

c. $1, -1, 1, -1, \ldots$

d. $0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$

e. $0, 0, 0, 3, -3, 3, -3, 3, \ldots$

f. $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$

g. $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$

h. $0, 0, 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \ldots$

i. $1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, 32, 0, 64, 0, 128, \ldots$

j. $0, 0, 1, b, a, b^2, a^2, b^3, a^3, b^4, a^4, b^5, a^5, b^6, a^6, b^7, \ldots$

Ejercicio 2 Determine la sucesión generada por cada una de las siguientes funciones generatrices.

a. $f(x) = (2x-3)^3$

b. $f(x) = x^3/(1-x)$

c. $f(x) = x^3/(1-x^2)$

d. $f(x) = 1/(1+3x)$

e. $f(x) = 1/(2-x)$

f. $f(x) = 3x^6 - 9 + 1/(1-x)$

Ejercicio 3 (Examen febrero 2010)

La función generatriz asociada a la sucesión $(0, 0, a, 1, 0, a^2, 2, 0, a^3, 3, 0, a^4, 4, 0, a^5, ...)$ es:

a. $f(x) = \dfrac{a}{1+ax^3} - \dfrac{x}{(1+x^6)}$.

b. $f(x) = \dfrac{a}{1+ax^3} - \dfrac{x}{(1+x^3)^2}$.

c. $f(x) = \dfrac{ax^2}{1-ax^3} + \dfrac{x^3}{(1-x^3)^2}$.

d. $f(x) = \dfrac{a}{1+ax^3} \times \dfrac{x}{(1+x^3)^2}$.

Ejercicio 4

a. Encuentre el coeficiente de x^8 en $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^{10}$.

b. Para cada n natural, encuentre el coeficiente de x^8 en $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^n$.

c. Para cada natural n encuentre los coeficientes de x^5, x^8 y en general de x^r en $(1+x+x^2)(1+x)^n$ para $0 \leq r \leq n+2$, $r \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 5

a. Dé una demostración de la igualdad del Ej. 27 del práctico 2 a partir de la igualdad polinómica

$$(1+x)^k(1+x)^{N-k} = (1+x)^N$$

b. Usando la identidad $(1+x)^n(1+x)^{-n} = 1$, demuestre que

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}\binom{n+m-k-1}{n-1}(-1)^{m-k} = 0 \quad \forall m \geq 1.$$

Ejercicio 6 Halle las funciones generatrices de $0^3, 1^3, 2^3, 3^3, \ldots$ y de $s_n = \sum_{i=0}^{n} i^3$, y deduzca la fórmula

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Ejercicio 7 Halle la función generatriz de $a_n = d_n/n!$ donde d_n denota los desórdenes de tamaño n.

Ejercicio 8 Halle una función generatriz y el coeficiente de la misma que resuelve las partes **a.** y **b.** del ejercicio 15 del práctico 4. Realice lo mismo si el ejercicio tuviera las siguientes nuevas partes:

c. x_2 par, **d.** x_1 par y x_3 impar, **e.** x_4 primo.

(*En todos los casos* $0 \leq x_i$ *para todo* $1 \leq i \leq 4$.)

Ejercicio 9 Verifique que $(1 - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 - x^6)^{-1}$ es la función generatriz de la cantidad de formas en que podemos obtener un número n como suma de las tiradas de un dado (todas las necesarias).

Ejercicio 10 Un parcial consta de 8 preguntas múltiple opción. Cada pregunta bien contestada vale 5 puntos y cada pregunta mal contestada o no contestada 0 puntos. Halle una función generatriz cuyo coeficiente en x^p indique la cantidad de formas de obtener p puntos. ¿Y si las mal contestadas valieran -1 puntos?

Ejercicio 11 Encuentre una fórmula para la convolución c_n de los siguientes pares de sucesiones:

a. $a_n = 1$, si $0 \leq n \leq 4$; $a_n = 0$, $\forall n \geq 5$, $b_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b. $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c. $a_n = 1$, si $0 \leq n \leq 3$; $a_n = 0$, $\forall n \geq 4$, $b_n = n$, si $0 \leq n \leq 3$; $b_n = 0$, $\forall n \geq 4$.

Ejercicio 12 Hallar el coeficiente de x^n en

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i}{i!} x^i \times \sum_{i=0}^{\infty} \frac{3^i}{i!} x^i$$

Ejercicios Complementarios.

Ejercicio 13 Halle la función generatriz de la cantidad de formas que tiene un cajero automático de dar n pesos. Los cajeros solo poseen billetes de 100, 200, 500 y 1000 pesos.

Ejercicio 14 (1$^{\text{er}}$ parcial 2009)
Sea a_n, $n \geq 0$, la cantidad de palabras de n letras A o B, tales que después de una A no puede venir una B (suponemos que $a_0 = 1$). Entonces, la función generatriz asociada a $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es:

a. $\dfrac{1}{1-x}$ **b**. $\dfrac{1}{(1-x)^2}$. **c**. $\dfrac{x}{(1-x)^2}$. **d**. $\dfrac{x}{1-x}$.

Ejercicio 15 Encuentre el coeficiente de x^{15} en las funciones

a. $x^3(1-2x)^{10}$. **b**. $(x^3 - 5x)/(1-x)^3$. **c**. $(1+x)^4/(1-x)^4$.

Ejercicio 16 Halle la función generatriz de

$$0 \cdot (-1),\ 1 \cdot 0,\ 2 \cdot 1,\ 3 \cdot 2,\ \ldots, i(i-1),\ \ldots,$$

y una fórmula para

$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1).$$

Ejercicio 17

a. Encuentre los primeros tres términos de la convolución c_n de los siguientes pares de sucesiones:

i) $a_n = 1, b_n = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

ii) $a_n = 1, b_n = 2^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

iii) $a_n = 1$, si $0 \leq n \leq 3; a_n = 0,\ \forall n \geq 4, b_n = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

b. En cada caso halle c_n para todo n.