

Práctico 3: Funciones y número de Stirling.

Ref. Grimaldi Secciones 5.2 y 5.3

Ejercicio 1 Determinar si las siguientes funciones son inyectivas y/o sobreyectivas:

- $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(a) = a - 1$.
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(a) = a^3 - 2a$.
- $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(a) = a^3 - 2a$.
- $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(a, b) = a$.
- $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(a, b) = 2^a 3^b$.
- $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(a, b) = 2^a 3^b$.
- $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(n, m) = 2^m(2n + 1) - 1$. (Del ej. 6 examen 28/2/02)
Aclaración: Suponemos que $0 \in \mathbb{N}$.
- $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = 2^y(2x + 1) - 1$. (Del ej. 6 examen 28/2/02)

Ejercicio 2 Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ dos funciones y $g \circ f$ la composición de f con g , es decir que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Si considera que los conjuntos A , B y C son finitos, pruebe o encuentre un contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

- Si f y g son inyectivas también lo es $g \circ f$.
- Si f y g son sobreyectivas también lo es $g \circ f$.
- Si $g \circ f$ es inyectiva también lo es f .
- Si $g \circ f$ es inyectiva también lo es g .
- Si $g \circ f$ es sobreyectiva también lo es f .
- Si $g \circ f$ es sobreyectiva también lo es g .

Ejercicio 3 Dados $A = \{1, 2, \dots, m\}$ y $B = \{1, 2, \dots, n\}$, calcule la cantidad de funciones f de A a B que satisfacen:

- f es inyectiva.
- f es biyectiva.
- $f(i) < f(j)$ para todo $i < j$ en A .
- $f(i) \leq f(j)$ para todo $i \leq j$ en A .

Ejercicio 4 Sea A un conjunto con 10 elementos y B uno con 3 elementos.

- ¿Cuántas funciones diferentes de A a B hay?
- Si denotamos con $\mathcal{P}(X)$ al conjunto de partes de X , es decir al conjunto de todos los subconjuntos de X ¿Cuál es el cardinal de $\mathcal{P}(B)$? ¿y el de $\mathcal{P}(A)$?

- c. Considere las funciones $f : B \rightarrow \mathcal{P}(B)$ que verifican para todo $x : f(x) \neq \{x\}$. ¿Cuántas de dichas funciones hay? (Examen Agosto 2003)
- d. Considere las funciones $f : \{1, 2, \dots, 6\} \rightarrow \mathcal{P}\{1, 2, \dots, 6\}$ inyectivas, tales que $1 \notin f(1), 2 \notin f(2)$. ¿Cuántas de dichas funciones hay? (Parcial de mayo de 2018)

Ejercicio 5 (Parcial 2000)

Considere los conjuntos $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. ¿Cuántas funciones $f : A \rightarrow B$ satisfacen $|f(A)| \leq 3$? Indique la opción correcta:

- a. $\text{Sob}(10, 3)$. d. $\binom{7}{3} \text{Sob}(10, 3) + \binom{7}{2} \text{Sob}(10, 2) + \binom{7}{1} \text{Sob}(10, 1)$.
- b. $3^{10} - \text{Sob}(10, 3)$.
- c. $\binom{7}{3} \text{Sob}(10, 3) - \binom{7}{2} \text{Sob}(10, 2) + \binom{7}{1} \text{Sob}(10, 1)$. e. $\binom{7}{3} \text{Sob}(10, 3)$.

Aclaración: $\text{Sob}(m, n)$ es la cantidad de funciones sobreyectivas de un conjunto con m elementos a uno con n .

Ejercicio 6 Dé un argumento combinatorio para probar que para todo n y m naturales vale:

- a. $n^m = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \text{Sob}(m, i)$.
- b. $\text{Sob}(m+1, n) = n(\text{Sob}(m, n-1) + \text{Sob}(m, n))$.
- c. $S(m+1, n) = S(m, n-1) + nS(m, n)$.
- d. $\text{Sob}(m, n) = \sum_{i=1}^{m-(n-1)} \binom{m}{i} \text{Sob}(m-i, n-1)$.
- e. $n! = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} d_k$, donde $d_0 = 1$ y d_k es el número de desarreglos de tamaño k .

Aclaración: En todos los casos, $S(m, n)$ indica el número de Stirling de 2da especie definido como $S(m, n) = \text{Sob}(m, n)/n!$.

Ejercicio 7 (1er parcial sep. 2016 Ej. 2)

Juan quiere guardar 10 libros diferentes en 7 estantes vacíos diferentes y quiere que al menos 5 de ellos posean un libro. ¿De cuántas maneras puede realizar esta tarea?

- a. $\text{Sob}(10, 7) + \text{Sob}(10, 6) \binom{7}{6} + \text{Sob}(10, 5) \binom{7}{5}$.
- b. CR_5^7 .
- c. CR_7^5 .
- d. $S(10, 7) + S(10, 6) \binom{7}{6} + S(10, 5) \binom{7}{5}$.
- e. $\text{Sob}(10, 7) + \text{Sob}(10, 6) + \text{Sob}(10, 5)$.