Matemática Discreta I - 2019 - 2^{DO} semestre

Práctico 1: Inducción Completa.

Ref. Grimaldi 4.1

Ejercicio 1 Demuestre que $7^n - 2^n$ es divisible por 5, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2 Encuentre (y demuestre) cuáles números naturales n pueden expresarse como suma de treses y/o cincos, es decir,

$$\text{existen } i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \ n = 3i + 5j.$$

Ejercicio 3 Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conjeture una fórmula para A^n y demuéstrela.

Ejercicio 4

a. Demuestre la siguiente igualdad: $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = n\,(n+1)\,(2n+1)/6$.

b. Probar que para todo $n \geq 1$ se cumple que $(\sum_{i=1}^{n} i)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3$. (Exam. febrero 2017 Ej6) (*Sugerencia:* Recordar que $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$)

Ejercicio 5 (1^{er} parcial octubre 2000 Ej16)
Sea m el menor número natural que verifica $2^m > m^2 + 1$. Halle m y pruebe por inducción que si $n \geq m$ entonces $2^n > n^2 + 1$.

Ejercicio 6 Demuestre que en la lista de inscriptos al curso de Matemática Discreta I, 2018, hay una cantidad par de estudiantes que tienen una cantidad impar de amigos inscriptos en el mismo curso (no vale llamar a Bedelía).

Ejercicio 7 Sean $f(x) = xe^x$ y $g(x) = 1/x$, demuestre las siguientes igualdades para las derivadas n-ésimas:

$$f^{(n)}(x) = e^x(x+n), \qquad g^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Ejercicio 8 Para $n \in \mathbb{N}$ sea S un subconjunto de números reales con $|S| = 2^n$. Demuestre que el número de comparaciones necesarias para ordenar en forma ascendente los elementos de S es menor o igual que $n \times 2^n$.

Ejercicios Complementarios

Ejercicio 9 (Exam. diciembre 2009 Ej6)
Demuestre por inducción completa que $10^{n+1} + 3 \times 10^n + 5$ es múltiplo de 9 para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 10 Demuestre que:

a. $n^3 - n$ es divisible por 3 para todo n entero.

b. La suma de los cubos de tres enteros consecutivos es divisible por 9.

Ejercicio 11 Demuestre que todo natural n puede expresarse como la suma de cinco y/o sietes siempre que n sea mayor o igual a 24, es decir para todo $n \geq 24$ existen $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $n = 5i + 7j$.

Ejercicio 12 (Exam. octubre 2001 Ej8a)
Demuestre que si

$$a_n = 2a_{n-1} + 7a_{n-2} + a_{n-3}$$

y $a_1 = 3, a_2 = 10, a_3 = 30$, entonces $a_n \geqslant 3^n$ para todo $n \geqslant 1$.

Ejercicio 13 Se define

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i!.i \qquad \text{para todo } n \geq 1.$$

Demuestre que $S_n = (n+1)! - 1$.

Ejercicio 14 Considere un tablero cuadriculado de 2^n cuadrados por lado al cual le falta un cuadradito en algún lugar. Demuestre que se puede cubrir dicho tablero con piezas en forma de L formadas por 3 cuadraditos cada una.

Ejercicio 15 La sucesión F_n de Fibonacci se define recursivamente del siguiente modo:
$F_0 = 0, F_1 = 1$ y

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \text{para todo } n \geqslant 2.$$

Pruebe que:

a. $\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$. **b**. $\sum_{i=1}^{2n} F_i F_{i-1} = F_{2n}^2$. **c**. $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$.

Ejercicio 16 Se considera la función f definida sobre $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$ por:

$$f(x) = \frac{1}{3x+2}.$$

Demuestre que la derivada n-ésima de f es:

$$f^{(n)}(x) = \frac{3^n (-1)^n n!}{(3x+2)^{n+1}}.$$