**Facultad de Ingeniería**
**IMERL**
**MATEMÁTICA DISCRETA I**
**Curso 2017**

# 1. Inducción Completa

**Ejercicio 1**
Probar que $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo natural $n$.

**Ejercicio 2**
Probar que $2^n \geq n^2$ a partir de cierto natural $n_0$ que se debe encontrar.

**Ejercicio 3**
Probar que $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5 para todo natural $n$.

**Ejercicio 4**
Encontrar el primer natural tal que él y sus siguientes se descomponen en sumas de treses y cincos.

**Ejercicio 5**
Probar que la suma de los cubos de tres enteros consecutivos siempre es múltiplo de 9.

**Ejercicio 6**
Conjeturar y demostrar una fórmula para $A^n$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 7 (Examen Diciembre 2009)**
Demostrar por inducción completa que $10^{n+1} + 3 \times 10^n + 5$ es múltiplo de 9 para todo $n \in \mathbb{N}$.

**Ejercicio 8**
Probar que la derivada $n$-ésima de $f(x) = xe^x$ es $f^{(n)}(x) = e^x(x+n)$.

# 2. Combinatoria

**Ejercicio 1**

1. ¿Cuántos números naturales pares de tres dígitos (en base diez), existen?
2. ¿Cuántos números naturales pares de tres dígitos distintos (en base diez), existen?

**Ejercicio 2**
Dados $A = \{1, 2, \dots, m\}$ y $B = \{1, 2, \dots, n\}$, contar la cantidad de funciones $f : A \to B$ tales que:

1. $f$ es inyectiva.
2. $f$ es biyectiva
3. $f$ es monótona creciente estrictamente.
4. $f$ es monótona creciente.

**Ejercicio 3**
Hallar la cantidad de maneras de distribuir $r$ pelotas del mismo color en $n$ cajas diferentes.

**Ejercicio 4**
Probar que el coeficiente en $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}$ de $(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n$ es $PR^n_{(n_1,\dots,n_r)} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_r!}$, donde los exponentes son naturales tales que $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$.

**Ejercicio 5**
Contar la cantidad de subconjuntos de un conjunto de $n$ elementos usando la Regla del Producto. Obtener el mismo resultado mediante el Binomio de Newton.

**Ejercicio 6**
Demostrar la fórmula de Stifel y escribir las primeras cuatro líneas del triángulo de Pascal.

**Ejercicio 7**

1. Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4$.
2. ¿Cuántas soluciones hay si se reemplaza el $=$ por un $<$?

**Ejercicio 8**
Contar la cantidad de naturales menores que cien mil cuyos dígitos suman 7.

**Ejercicio 9**
Hallar la cantidad de palabras distintas que pueden obtenerse permuntando las letras de

$$MOMENTANEAMENTE$$

si la primera letra debe ser $O$. ¿Y si la primera letra tuviera que ser $M$ u $O$ ?

**Ejercicio 10**

1. ¿De cuántas maneras se puede particionar un conjunto de 6 elementos en subconjuntos de cardinal 3, 2 y 1?
2. ¿Y si todos los subconjuntos tienen cardinal 2?
3. ¿De cuántas formas es posible hacer una partición de un conjunto de $2n$ elementos en $n$ conjuntos de 2 elementos?

**Ejercicio 11**
¿De cuántas formas puede distribuir un maestro 8 bizcochos de chocolate y 7 de crema entre 3 estudiantes, si cada uno desea al menos un bizcocho de cada tipo?

**Ejercicio 12**

1. ¿Cuántas formas hay de sentar 5 niños en 12 sillas puestas en línea?
2. Idem al anterior pero los niños no deben quedar sentados uno junto al otro.

**Ejercicio 13**

1. ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener al arrojar 3 dados?
2. ¿Cuántas fichas diferentes hay en el juego del dominó?
3. ¿De cuántas maneras diferentes puede una torre de ajedrez, desplazarse desde la esquina inferior izquierda hasta la esquina superior derecha, admitiendo únicamente movimientos hacia arriba o hacia la derecha?

**Ejercicio 14**
En una playa se juntan 13 chicos y deciden hacer 4 equipos para jugar al voleibol. Para ello, deciden hacer tres equipos de 3 jugadores y uno de 4. Entre los chicos se encuentra uno sumamente habilidoso y otro que es de madera; los restantes 11 jugadores son intermedios. Para equiparar, al habilidoso lo colocan en uno de los equipos de 3 jugadores y al de madera en el equipo de 4 jugadores. Probar que en estas condiciones existen 46200 posibles formas de armar los equipos.

**Ejercicio 15**
Sea $A$ un conjunto con 10 elementos y $B$ uno con 3 elementos.

1. ¿Cuántas funciones diferentes de $A$ a $B$ hay?
2. ¿Cuál es el cardinal de $\mathcal{P}(B)$? ¿Y el de $\mathcal{P}(A)$?
3. ¿Cuántas funciones $f : B \longrightarrow \mathcal{P}(B)$ verifican que $f(x) \neq \{x\}$ para todo $x$?

**Ejercicio 16**
Considere los conjuntos $A = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. ¿Cuántas funciones $f : A \to B$ satisfacen $|f(A)| \leq 3$? Indique la opción correcta:

1. $Sob(10, 3)$.
2. $3^{10} - Sob(10, 3)$.
3. $\binom{7}{3}Sob(10, 3) - \binom{7}{2}Sob(10, 2) + \binom{7}{1}Sob(10, 1)$.
4. $\binom{7}{3}Sob(10, 3) + \binom{7}{2}Sob(10, 2) + \binom{7}{1}Sob(10, 1)$.
5. $\binom{7}{3}Sob(10, 3)$.

**Ejercicio 17 (Examen 2001)**
Hallar la cantidad de palabras de 1 a 5 letras que se pueden formar usando las letras de $CASAS$.

**Ejercicio 18**
Dar un argumento combinatorio para probar que para todo $n$ y $m$ naturales vale:

1. $n^m = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} Sob(m, i)$.
2. $Sob(m + 1, n) = n(Sob(m, n - 1) + Sob(m, n))$.
3. $S(m + 1, n) = S(m, n - 1) + nS(m, n)$.
4. $Sob(m, n) = \sum_{i=1}^{m-(n-1)} \binom{m}{i} Sob(m - i, n - 1)$.
5. $n! = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$, donde $d_0 = 1$ y $d_k$ es el número de desarreglos de tamaño $k$.

**Ejercicio 19 (Primer Parcial 2009)**
¿Cuántas palabras de longitud 6 existen que no tengan dos consonantes o dos vocales juntas?

**Ejercicio 20 (Examen 2001)**
Si $p$ es un número primo, hallar la cantidad $n$ de 4-uplas $(a, b, c, d)$ de enteros mayores que 1 cuyo producto es $p^{20}$. Es decir, $n = \left|\{(a, b, c, d) \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})^4 : \ a{\cdot}b{\cdot}c{\cdot}d = p^{20}\}\right|$.

## EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

**Ejercicio 21**
¿De cuántas formas se pueden distribuir las 32 piezas del ajedrez en el tablero sin que los reyes estén amenazándose?

**Ejercicio 22**
De cuántas formas puede un jugador extraer 5 cartas de una baraja común (de 48 cartas) y obtener:

1. Cinco cartas del mismo palo.
2. Cuatro ases.
3. Cuatro cartas del mismo valor.
4. Tres ases y dos sotas.
5. Tres ases y un par (dos cartas con el mismo valor).

**Ejercicio 23**
Para una selección de fútbol, fueron convocados 2 goleros, 6 zagueros, 7 mediocampistas y 4 atacantes. ¿Cuántas maneras hay de formar una selección con un golero, 4 zagueros, 4 mediocampistas y 2 atacantes?

**Ejercicio 24**
En una prueba que consta de 10 preguntas, un estudiante decide responder solo 6 con al menos 3 de esas preguntas elegidas de entre las 5 primeras. ¿De cuántas formas distintas podría hacerlo?

**Ejercicio 25**

1. Hallar el coeficiente en $x^5$ en el desarrollo de $(x^5 + x - 1)^{10}$.
2. Hallar el coeficiente en $xy^3z^5$ del polinomio $(2x + 4y + 2z + 5)^{14}$

**Ejercicio 26 (Primer Parcial 2000)**
Demostrar que $\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\binom{N-k}{n-i} = \binom{N}{n}$, siendo $k \leq n \leq N$ naturales.

# 3. Principio del Palomar y de Inclusión-Exclusión

## Principio de Inclusión-Exclusión

**Ejercicio 1**

(a) ¿Cuántos enteros entre 1 y 105 inclusive no son divisibles por ninguno de los enteros 3, 5, 7?

(b) (Exam. julio 2000 Ej9) ¿Cuántos enteros entre 1 y 1155 inclusive son múltiplos de 3 pero no son divisibles por ninguno de los enteros 5,7 y 11?

**Ejercicio 2**

De 100 estudiantes, 32 estudian matemática, 20 física, 45 biología, 15 matemática y biología, 7 matemática y física, 10 física y biología, 30 no estudian ninguna de las tres materias.

1. Encontrar el número de estudiantes que estudian las tres materias.
2. Encontrar el número de estudiantes que estudian exactamente una de las tres materias.

**Ejercicio 3**

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$$

si $x_i$ es un entero y
(a) $0 \leqslant x_i \leqslant 8$ para todo $i$?
(b) $0 \leqslant x_1 \leqslant 5$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 6$, $3 \leqslant x_3 \leqslant 7$ y $0 \leqslant x_4 \leqslant 8$?

**Ejercicio 4**

(Exam. diciembre 2009 Ej3) Se tira un dado 6 veces. Calcular la cantidad de formas en que podemos obtener un número múltiplo de 18 como suma de las 6 tiradas del dado.

**Ejercicio 5**

Calcular cuántas permutaciones de los dígitos de 123456789 cumplen que:
(a) Ningún dígito está en su posición original.
(b) Los pares no están en su posición original.
(c) Los pares no están en su posición natural y la secuencia debe empezar con los dígitos 1, 2, 3, 4 en algún orden.

**Ejercicio 6**

¿De cuántas formas pueden extraerse 9 canicas de una bolsa si hay 3 de cada uno de los siguientes colores: blanco, rojo, azul, negro?

**Ejercicio 7**

¿Cuántos enteros positivos entre 1 y 9.999.999 inclusive tienen a 31 como la suma de sus dígitos?

**Ejercicio 8**

¿Cuántas palabras de 4 letras pueden formarse usando las letras A,B,C,D,E si debe aparecer al menos una vocal?

## Principio del Palomar

**Ejercicio 9**
Demostrar que cualquier subconjunto de seis elementos del conjunto $S = \{1, 2, \ldots, 9\}$ debe contener dos elementos cuya suma sea 10.

**Ejercicio 10**
Dados cinco punto de un cuadrado de lado 2, probar que deben haber dos que estén a distancia menor o igual que $\sqrt{2}$.

**Ejercicio 11**
Sea $f : A \longrightarrow B$ una función, donde $|A| > |B|$. Demostrar que hay al menos $\lceil |A| \,/\, |B| \rceil$ puntos del dominio que toman el mismo valor.

**Ejercicio 12**
(1er Par. setiembre 2009 Ej3) Se consideran $n$ puntos en un triángulo equilátero de lado 1. ¿Cuál es el $n$ mínimo que garantiza que al menos dos de los puntos se encuentran a distancia menor o igual que $\frac{1}{2}$? (Vale colocar puntos sobre los lados del triángulo).

**Ejercicio 13**
Demostrar que entre 100.000 personas hay al menos dos que nacieron exactamente al mimo tiempo (hora, minuto y segundo).

**Ejercicio 14**
Probar que al menos uno de $m$ enteros consecutivos es divisible por $m$.

**Ejercicio 15 (Examen Marzo 2003)**
Hallar el menor natural $n$ tal que dados $n$ dígitos diferentes se puede asegurar que existen dos de ellos cuyos cuadrados diferirán en un múltiplo de 6.

**Ejercicio 16**
Hallar el menor entero $n$ tal que todo tablero rectangular cuadriculado de $4 \times n$, con sus cuadrados pintados de dos colores, tenga al menos un rectángulo cuyas cuatro esquinas estén pintadas del mismo color.

**Ejercicio 17 (Examen Julio 2004)**
Sea un tablero de 141 filas y 8 columnas. Cada cuadradito del tablero se pinta de blanco o de negro de forma tal que cada fila tenga exactamente cuatro cuadraditos pintados de negro. Demostrar que hay al menos tres filas con igual secuencia de colores.

# 4. Sucesiones

**Ejercicio 1**
Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones:

1. $a_{n+1} - \frac{3}{2}a_n = 0, \quad n \geqslant 0.$
2. $a_n - na_{n-1} = 0, \quad n \geqslant 1.$
3. $na_n - (n-1)a_{n-1} = 0, \quad n \geqslant 2.$
4. $a_n/a_{n-1}^p = 2$, siendo $a_0 = 1$, $p$ positivo diferente de 1.

**Ejercicio 2**
Expresar explícitamente en $n$ las sucesiones:

1. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, \quad n \geqslant 2,$
   con $a_0 = 1, a_1 = 3.$
2. $3a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}, \quad n \geqslant 1,$
   con $a_0 = 7, a_1 = 3.$
3. $a_{n+2} + 4a_n = 0, \quad n \geqslant 1,$
   con $a_0 = a_1 = 1.$
4. $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0, \quad n \geqslant 2,$
   con $a_0 = 5, a_1 = 12.$
5. $a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n = 3 + 5n, \quad n \geqslant 0.$
6. $a_n = 2a_{n-1} + n2^n, \quad n \geqslant 1$, con $a_0 = 1$.
7. $a_{n+2} + ba_{n+1} + ca_n = 0, \quad n \geqslant 0,$
   con $a_0 = 0, a_1 = 1$, $a_2 = 4$ y $a_3 = 37$, y siendo $b$ y $c$ constantes desconocidas.

**Ejercicio 3**
Exprese $a_n$ en función de los términos anteriores ($a_k$ con $k \leqslant n-1$) siendo $a_n$:

1. La cantidad de saludos que se dieron los primeros $n$ invitados de una reunión, si cada vez que llego uno, éste saludo el resto.
2. El número de secuencias de 0s y 1s de largo $n$ en las cuales no aparecen dos ceros seguidos.
3. (Exam. marzo 2001) El número de secuencias de $A$s, $B$s y $C$s de largo $n$ en las cuales no aparecen dos $A$s seguidas.
4. Cantidad de formas de subir una escalera de $n$ escalones si se puede a veces saltar un escalón.
5. Lo anterior pero sin que se puedan saltar dos veces seguidas un escalón (o sea, que si se saltea un escalón, entonces el siguiente no se saltea).
6. El número de formas en que una sucesión de unos y doses suman $n$. Por ejemplo, para $n = 3$ serían las sucesiones 111, 12 y 21.
7. (Parcial 2010) La cantidad de enteros positivos de hasta $n$ dígitos con $\{0, 1, 2\}$, tales que la suma de sus dígitos es impar.
8. La cantidad de palabras binarias de largo $n$, que no tienen 3 unos consecutivos.

**Ejercicio 4**
Se pretende diseñar una bandera con $n$ franjas horizontales, cada una de las cuales puede ser de color rojo, azul, verde o amarillo. Hallar la cantidad de banderas posibles en cada una de las siguientes situaciones:

1. No hay restricciones sobre el color de cada franja.
2. Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color.
3. Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color, como tampoco pueden serlo la primera y la última franjas.

**Ejercicio 5**
Hay $n$ estudiantes formando una fila y cuando suena el silbato cada estudiante puede intercambiar de lugar con su compañero de adelante o de atrás (en caso de que los haya). ¿De cuantas formas diferentes pueden quedar esos $n$ estudiantes luego de haber sonado el silbato?

**Ejercicio 6 (Primer Parcial 2009)**
Si $a_n$ verifica que $a_n - 2a_{n-1} = 3 \times 2^n$, con $a_0 = 1$, entonces:

(A) $a_{50} = 2^{50}$.
(B) $a_{50} = 50 \times 2^{50}$.
(C) $a_{50} = 150 \times 2^{50}$.
(D) $a_{50} = 151 \times 2^{50}$.

**Ejercicio 7 (Examen Diciembre 2008)**
Para todo $n \in \mathbb{N}$ se considera el número: $a_n = ((\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^n)$.

1. Mostrar que $a_n$ verifica una relación de recurrencia de orden 2, homogénea, a coeficientes constantes.
2. Probar que $a_n$ es un entero positivo, para todo $n \in \mathbb{N}$.

## EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

**Ejercicio 8 (Parcial 2001)**
Se considera la siguiente ecuación:

$$a_n + \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} = 2^n \qquad \text{para todo } n \geqslant 2.$$

Hallar $\alpha$, $\beta$ y $a_{100}$ sabiendo que: $a_0 = 1, a_1 = 5, a_2 = 1$ y $a_3 = 17$.

**Ejercicio 9 (Examen Febrero 2009)**
Para un campeonato de fútbol se tiene una cantidad par de equipos participantes. Se quiere armar la primera fecha (en una fecha todos los equipos juegan exactamente una vez). Sea $a_k$ la cantidad de formas de armar la primera fecha de un campeonato con $2k$ equipos.

1. Calcular $a_1, a_2, a_3$.
2. Deducir que $a_{k+1} = (2k+1) \times a_k$.
3. Probar que $a_k = (2k-1) \times (2k-3) \times ... \times 3 \times 1$, para todo $k \geq 1$.

# 5. Funciones Generatrices

**Ejercicio 1**
Encontrar las funciones generatrices para las siguientes sucesiones (por ejemplo en el caso de la sucesión $1, 1, 1, \ldots$ la respuesta pedida es $1/(1-x)$ y no $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ ni $\sum x^i$).

1. $C^6_0,\ C^6_1,\ C^6_2, \ldots,\ C^6_6, \ldots$
2. $C^6_1,\ 2C^6_2, \ldots,\ 6C^6_6, \ldots$
3. $1, -1, 1, -1, \ldots$
4. $0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$
5. $0, 0, 0, 3, -3, 3, -3, 3, \ldots$
6. $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$
7. $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$
8. $0, 0, 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \ldots$
9. $1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, 32, 0, 64, 0, 128, \ldots$
10. $0, 0, 1, b, a, b^2, a^2, b^3, a^3, b^4, a^4, b^5, a^5, b^6, a^6, b^7, \ldots$

**Ejercicio 2**
Determinar la sucesión generada por cada una de las siguientes funciones generatrices.

1. $f(x) = (2x-3)^3$
2. $f(x) = x^3/(1-x)$
3. $f(x) = x^3/(1-x^2)$
4. $f(x) = 1/(1+3x)$
5. $f(x) = 1/(2-x)$
6. $f(x) = 3x^6 - 9 + 1/(1-x)$

**Ejercicio 3 (Examen Febrero 2010)**
La función generatriz asociada a la sucesión $(0, 0, a, 1, 0, a^2, 2, 0, a^3, 3, 0, a^4, 4, 0, a^5, ...)$ es:

$$\text{(A)} f(x) = \tfrac{a}{1+ax^3} - \tfrac{x}{(1+x^6)}. \quad \text{(B)} f(x) = \tfrac{a}{1+ax^3} - \tfrac{x}{(1+x^3)^2}.$$
$$\text{(C)} f(x) = \tfrac{ax^2}{1-ax^3} + \tfrac{x^3}{(1-x^3)^2}. \quad \text{(D)} f(x) = \tfrac{a}{1+ax^3} \times \tfrac{x}{(1+x^3)^2}.$$

**Ejercicio 4**

1. Hallar el coeficiente de $x^8$ en $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^{10}$.
2. Para cada $n$ natural, hallar el coeficiente de $x^8$ en $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^n$.
3. Para cada natural $n$ encuentre los coeficientes de $x^5$, $x^8$ y en general de $x^r$ en $(1 + x + x^2)(1 + x)^n$ para $0 \leq r \leq n + 2$, $r \in \mathbb{N}$.
4. Hallar el coeficiente de $x^{15}$ en las funciones

   *a)* $x^3(1-2x)^{10}$.
   *b)* $(x^3 - 5x)/(1-x)^3$.
   *c)* $(1+x)^4/(1-x)^4$.

**Ejercicio 5**
Obtener una fórmula para la convolución $c_n$ de los siguientes pares de sucesiones:

1. $a_n = 1$, si $0 \leq n \leq 4; a_n = 0,\ \forall n \geq 5, b_n = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
2. $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
3. $a_n = 1$, si $0 \leq n \leq 3; a_n = 0,\ \forall n \geq 4, b_n = n$, si $0 \leq n \leq 3; b_n = 0,\ \forall n \geq 4$.

**Ejercicio 6 (Examen Diciembre 2009)**
Resuelva el siguiente sistema de relaciones de recurrencia:

$$\begin{cases} a_n = -a_{n-1} - b_n \\ b_{n+1} = b_n - 3a_{n-1} \\ n \geq 0,\ a_0 = 0,\ b_0 = 2, b_1 = 1 \end{cases}$$

**Ejercicio 7**

1. Hallar las funciones generatrices de $a_n = n^3$ y de $s_n = \sum\limits_{i=0}^{n} i^3$.
2. Deducir la fórmula $\sum_{i=0}^{n} i^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$.

**Ejercicio 8**
Hallar la función generatriz de $a_n = \frac{d_n}{n!}$ donde $d_n$ denota los desórdenes de tamaño $n$.

**Ejercicio 9**
Verifique que $(1 - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 - x^6)^{-1}$ es la función generatriz de la cantidad de formas en que podemos obtener un número $n$ como suma de las tiradas de un dado (todas las necesarias).

**Ejercicio 10**
Hallar la función generatriz de la cantidad de formas que tiene un cajero automático de dar $n$ pesos. Los cajeros solo poseen billetes de 100, 200, 500 y 1000 pesos.

## EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

**Ejercicio 11**
a) Obtener los primeros tres términos de la convolución $c_n$ de los siguientes pares de sucesiones:

1. $a_n = 1, b_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. $a_n = 1, b_n = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$.
3. $a_n = 1$, si $0 \leq n \leq 3; a_n = 0, \forall n \geq 4, b_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

b) En cada caso hallar $c_n$ para todo $n$.

**Ejercicio 12**
Hallar la función generatriz de $a_n = n(n-1)$ y una fórmula para $\sum_{i=0}^{n} i(i-1)$.

**Ejercicio 13 (Primer parcial 2009)**
Sea $a_n$, $n \geq 0$, la cantidad de palabras de $n$ dígitos, con letras $A$ y $B$ tales que después de una $A$ no puede venir una $B$ (donde hay una única palabra de longitud 0, o sea $a_0 = 1$). Entonces, la función generatriz asociada a $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es:

(A) $\frac{1}{1-x}$. (B) $\frac{1}{(1-x)^2}$. (C) $\frac{x}{(1-x)^2}$. (D) $\frac{x}{1-x}$.

**Ejercicio 14**
Un parcial consta de 8 preguntas múltiple opción. Cada pregunta bien contestada vale 5 puntos y cada pregunta mal contestada o no contestada 0 puntos. Hallar una función generatriz cuyo coeficiente en $x^p$ indique la cantidad de formas de obtener $p$ puntos.

**Ejercicio 15**
Hallar el coeficiente de grado i del desarrollo en serie de potencias del producto en convolución $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{2^i}{i!} \times \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{3^i}{i!}$

# 6. Relaciones

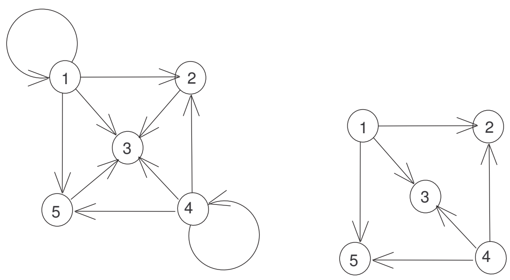
**Ejercicio 1**
¿Cuántas relaciones binarias (a) reflexivas, (b) simétricas, (c) asimétricas, (d) antisimétricas son definibles sobre un conjunto con $n$ elementos?

**Ejercicio 2**
Sean $R$ y $S$ relaciones en un conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

1. Elaborar un criterio para decidir si $R$ es o no *simétrica* basándose en la matriz de $R$.
2. Si $R$ y $S$ son *simétricas*: ¿lo serán también $\overline{R}$, $R^{-1}$, $R \circ S$, $R \cup S$, $R \cap S$?
3. Ídem a los casos anteriores sustituyendo *simétrica* por *reflexivas, irreflexivas, antisimétricas, asimétricas y transitivas.*

**Ejercicio 3**
Determinar si las siguientes relaciones son reflexivas, irreflexivas, simétricas, antisimétricas, asimétricas o transitivas en $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

1. $\{(1,1);(1,2);(2,1);(2,2);(3,3);(3,4);(4,3);(4,4)\}$.
2. $\{(1,2);(1,3);(1,4);(2,3);(2,4);(3,4)\}$.
3. $\{(1,3);(1,1);(3,1);(1,2);(3,3);(4,4)\}$.
4. $\emptyset$.
5. $A \times A$.
6. Tomar $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y las relaciones cuyos grafos dirigidos son:




7. Las relaciones cuyas matrices son

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 4 (Parcial 2000)**
Hallar el número de relaciones $R$ en el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ que verifican simultáneamente las 3 condiciones siguientes: $R$ es simétrica; $(a, b) \in R$; $(c, c) \in R$. Construir la matriz y el diagrama de flechas (o digrafo) de una de estas relaciones.

**Ejercicio 5 (Parcial 2001)**
Sea $R$ una relación *compatible* sobre un conjunto no vacío $A$, es decir, $R$ es reflexiva y transitiva. Considere las relaciones $R^{-1}$ y $S = (R \circ R^{-1}) \cup (R^{-1} \circ R)$. Indique la opción correcta:

A) $R^{-1}$ es compatible, $S$ es simétrica y $R \subseteq S$.

B) $R^{-1}$ no es compatible, $S$ no es simétrica y $R \not\subseteq S$.

C) $R^{-1}$ es un orden parcial y $S$ es irreflexiva.

D) $R^{-1}$ es compatible y $S$ no es simétrica y $R \not\subseteq S$.

E) $R^{-1}$ no es compatible y $S$ es simétrica y $R \subseteq S$.

**Ejercicio 6**
Sea $n$ un entero positivo. Definamos la relación $\equiv$ en $\mathbb{Z}$, llamada congruencia módulo n, en la forma:

$$a \equiv b \text{ si } a - b \text{ es divisible por } n.$$

1. Probar que $\equiv$ es una relación de equivalencia.
2. Demostrar que $a \equiv b \iff a$ y $b$ dan el mismo resto al ser divididos por $n$.
3. Describir el conjunto cociente $\mathbb{Z}/\equiv$ cuando $n = 3, 2, 1$.
4. Probar que $|\mathbb{Z}/\equiv|$ tiene $n$ elementos.

**Ejercicio 7**
Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sea $R_n$ el número de relaciones de equivalencia diferentes que pueden definirse en un conjunto dado con $n$ elementos. Para cada $n, i \in \mathbb{N}$ sea $S(n,i)$ el número de Stirling del segundo tipo. Probar que:

1. Para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se cumple $R_{n+1} = C_0^n R_n + C_1^n R_{n-1} + \cdots + C_n^n R_0$.
2. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $R_n = S(n,1) + S(n,2) + \cdots + S(n,n)$

**Ejercicio 8**
En cada uno de los siguientes casos, probar que $R$ es una relación de equivalencia en $A$ y describa el conjunto cociente $A/R$:

1. $A = \mathbb{Z}$ y $aRb$ si $a^2 = b^2$.
2. $A = \mathbb{Z}$ y $aRb$ si $a^2$ y $b^2$ dan el mismo resto al dividirlos por 5.
3. $A = \mathbb{Z}$ y $aRb$ si $a^4$ y $b^4$ dan el mismo resto al dividirlos por 5.
4. $A = \mathbb{R}^2$ y $vRw$ si existe $a \in \mathbb{R}$ no nulo tal que $w = av$.

**Ejercicio 9**

1. Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia R sobre el conjunto A={0,...,9}
   con $\#[0] = 5, \#[2] = 3 \quad y\,(2,0) \notin R$
2. Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia R sobre el conjunto A={0,...,7}
   con $\#[4] = 2, (1,5) \in R, (2,5) \in R$ y al menos hay 3 clases de equivalencia.

**Ejercicio 10 (Parcial 2000)**
Sea $M$ el conjunto de todas las matrices reales $n \times n$. Probar que la relación $\sim$ en $M$ definida por:

$$A \sim B \Leftrightarrow \text{ existe } P \in M \text{ invertible tal que } B = PAP^{-1}$$

es de equivalencia. Hallar la clase de la matriz nula y la clase de la matriz identidad.

# 7. Teoría de Grafos - Elementos

**Definiciones:** Todos los grafos se supondrán simples, es decir, sin artistas múltiples ni lazos. El grafo *completo* $K_n$ tiene $n$ vértices todos unidos entre sí. El *bipartito completo* $K_{n,m}$ tiene $n+m$ vértices $n$ de los cuales están unidos a los otros $m$, y esas son las únicas adyacencias. El *camino simple* $P_n$ tiene $n$ vértices y todo él es un camino simple. El $n$*–ciclo* $C_n$ tiene $n$ vértices y todo él es un ciclo.

El grafo de *Petersen* es el de la Figura 1. Un grafo es un *árbol* si es conexo y no tiene ciclos. El árbol trivial tiene un solo vértice y ninguna arista. La *distancia* entre dos vértices $a$ y $b$ de un grafo conexo es la menor de las longitudes de los caminos que los unen. El *diámetro* de un grafo conexo es la mayor de las distancias entre dos vértices cualesquiera. Por ejemplo, el diámetro de $P_4$ es 3 y el de $C_5$ es 2.

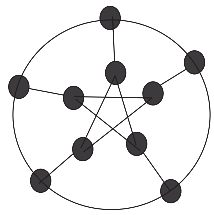


Figura 1: Grafo de Petersen

**Ejercicio 1**
Probar que todo árbol no trivial tiene al menos dos hojas.

**Ejercicio 2**
Probar que todo árbol $T = (V, E)$ cumple que $|E| = |V| - 1$.

**Ejercicio 3**
Probar que todo grafo conexo $G = (V, E)$ cumple que $|E| \geq |V| - 1$.

**Ejercicio 4**
Probar que todo grafo acíclico $A = (V, E)$ cumple que $|E| \leq |V| - 1$.

**Ejercicio 5**

1. Contar la cantidad de ciclos de $K_n$.
2. Contar la cantidad de caminos simples de $K_n$ y de $K_{1,n}$.
3. Hallar la mínima cantidad de aristas que se debe eliminar a $K_n$ para que quede desconectado en 2 componentes conexas, ninguna de las cuales sea un vértice aislado.

**Ejercicio 6**
¿Cuántos caminos de largo $n$ hay entre dos vértices opuestos de $C_4$?

**Ejercicio 7**
Contar la cantidad de aristas y de ciclos de longitud $k$ que hay en el grafo de $n$ rayos $W_n$.

**Ejercicio 8**
Probar que todo par de caminos simples cuyos largos coinciden con el diámetro no son disjuntos.

**Ejercicio 9**
Hallar el diámetro de $K_n$, $K_{n,m}$, $P_n$, $C_n$ y el grafo de Petersen.

**Ejercicio 10**
Determinar si se cumple o no que:

1. $K_4$ contiene un camino que no es un recorrido.
2. $K_4$ contiene un recorrido que no es ni un circuito ni es simple.
3. $K_4$ contiene un circuito que no es simple.

**Ejercicio 11**
Sea $G$ el grafo con conjunto de vértices $\{$ 1, 2, $\ldots$,15$\}$ donde el vértice $i$ es adyacente al $j$ si y solo si su máximo común divisor es mayor que 1. ¿Cuántas componentes conexas tiene $G$?

**Ejercicio 12**
Sea $G$ el grafo de la Figura 2 (a).

1. ¿Cuántos subgrafos conexos de $G$ tienen 4 vértices e incluyen un ciclo?
2. Describa el subgrafo $G_1$ de $G$ (Figura 2 (b)) como un subgrafo inducido y en términos de la eliminación de vértices de $G$.
3. Ídem para el subgrafo $G_2$ (Figura 2 (c)).
4. Trace el subgrafo de $G$ inducido por el conjunto de vértices $U = \{b, c, d, f, i, j\}$.
5. Sean $e_1$ y $e_2$ las artistas $\{a, c\}$ y $\{a, d\}$ respectivamente del grafo $G$. Trace los siguientes subgrafos de $G$: (i) $(G - e_1) - e_2$; (ii) $(G - e_2) - e_1$; (iii) $G - \{e_1, e_2\}$.
6. Encontrar un subgrafo de $G$ que no sea inducido.
7. ¿Qué condición o condiciones debe cumplir un subgrafo para no ser inducido?
8. ¿Cuántos subgrafos recubridores tiene $G$?
9. ¿Cuántos de los subgrafos anteriores son conexos?
10. ¿cuántos subgrafos de la parte 8 tienen el vértice $a$ como vértice aislado?

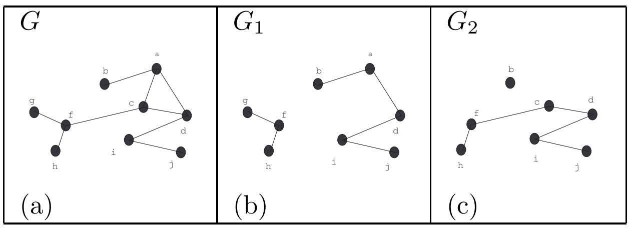



Figura 2:

## EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

**Ejercicio 13**
Un hombre debe cruzar un perro, una oveja y una bolsa de repollos, que están en la otra margen del río, por medio de una canoa. El tamaño de la canoa no permite llevar más de un objeto a la vez y se entiende que luego de cruzar uno de estos no vuelve hacia atrás inmediatamente después con el mismo objeto. Además, no se puede dejar al perro sólo con la oveja ni a la oveja sola con la bolsa de repollos.

1. ¿Cómo se podrá hacer?
2. ¿Puede el hombre realizar el proceso si ha de hacer exactamente 20 viajes? (Un viaje es ir de una margen del río a la otra).

*Sugerencia: asociar a cada disposición factible un vértice y unir dos vértices si se puede pasar de dicha disposición a la otra en un solo viaje.*

**Ejercicio 14 (Examen Marzo 2001)**
El hipercubo $H_n$ de dimensión $n$, es el grafo cuyos vértices son las $n$-uplas de ceros y unos, tales que dos $n$-uplas son adyacentes si coinciden en todas sus coordenadas salvo exactamente en una de ellas.

1. Hallar los conjuntos de vértices de $H_1$, $H_2$, $H_3$ y dibuje dichos grafos.
2. ¿Cuántos vértices y aristas tiene $H_n$?
3. Hallar 2 caminos simples en $H_5$ de $(0,0,1,1,0)$ a $(0,0,0,1,0)$.
4. Demostrar que $H_n$ no tiene 3–ciclos.
5. ¿Cuántos 4–ciclos tiene $H_n$?

*Sugerencia: considere un vértice fijo y cuente cuántos 4–ciclos pasan por él.*

**Ejercicio 15**
Sea $G_n$ el grafo con vértices las $n$-uplas de 0s y 1s: $V(G_n) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \{0,1\}\}$.
Dos $n$-uplas serán adyacentes si difieren en los valores de exactamente dos de sus posiciones, coincidiendo en el resto. Por ejemplo, en $G_3$, $(0,0,1)$ es adyacente a $(1,1,1)$ y a $(1,0,0)$, pero no a $(1,1,0)$.

1. Dibuje $G_1$, $G_2$ y $G_3$.
2. ¿Para qué valores de $n$ es $G_n$ conexo?
3. ¿Cuántas componentes conexas tiene $G_n$?

*Sugerencia: sume los 1s de cada vértice.*

**Ejercicio 16**
Probar que si un grafo bipartito $G = (A \cup B, E)$ admite emparejamiento perfecto, entonces $|N(D)| \geq |D|$, para todo conjunto $D \subseteq A$.

**Ejercicio 17**
Contar la cantidad de árboles recubridores de $K_4$ y $K_5$.

# 8. Isomorfismos, Grafos Eulerianos y Hamiltonianos

**Definiciones:**

- Todos los grafos de este práctico se suponen simples, es decir, sin aristas múltiples.
- Un vértice es *aislado* si no es adyacente a ningún otro.
- El *grafo complemento* $\bar{G}$ de un grafo $G = (V, E)$ se define como $\bar{G} = (V, V^{(2)} \setminus E)$ donde $V^{(2)} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$. Un grafo $G$ se dice *autocomplementario* si es isomorfo a $\bar{G}$.
- Si $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son dos grafos vértices disjuntos ($V_1 \cap V_2 = \varnothing$), entonces su *grafo unión* $G_1 \cup G_2$ se define como $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.
- Denotaremos $\kappa(G)$ a la cantidad de componentes conexas de $G$.
- Un grafo se dice *$k$–regular* si todos sus vértices tiene grado $k$. Un *vértice colgante* es un vértice de grado 1.

**Ejercicio 1**
Demostrar que en una reunión de 6 personas, existen 3 personas que se conocen entre sí o 3 personas que no se conocen ninguna de ellas (pueden ocurrir ambas).

**Ejercicio 2**
Encontrar todos los árboles con 6 vértices, a menos de isomorfismos.

**Ejercicio 3**
En una clase con 9 alumnos, cada alumno le manda 3 tarjetas de navidad a otros 3. ¿Es posible que cada alumno reciba tarjetas de los mismos 3 compañeros a los cuales él le mando una?

**Ejercicio 4**
Sea $G$ un grafo con $n$ vértices. ¿Cuántos vértices de $\bar{G}$ tienen grado par si $G$ tiene un sólo vértice de grado par?

**Ejercicio 5**
Probar que $K_n$ posee tres subgrafos dos a dos isomorfos y arista disjuntos si y sólo si $n$ es de la forma $3k$ o $3k + 1$.

**Ejercicio 6**

1. ¿Cuál es el máximo orden posible para un grafo con 17 aristas si todos sus vértices tienen grado mayor o igual a 3?
2. ¿Existe algún grafo con dicha cantidad de vértices? Construir en caso afirmativo.

**Ejercicio 7**
Para todo natural par $n \geq 4$ construir un grafo conexo 3–regular con $n$ vértices.

**Ejercicio 8**
Demostrar que todo grafo conexo con 2 o más vértices tiene dos vértices con el mismo grado.

**Ejercicio 9**
¿Cuántas hojas (vértices colgantes) tiene un árbol con cuatro vértices de grado 2, uno de grado 3, dos de grado 4 y uno de grado 5?

**Ejercicio 10**
Para cada par de grafos de la Figura 3 determinar si los grafos son o no isomorfos.

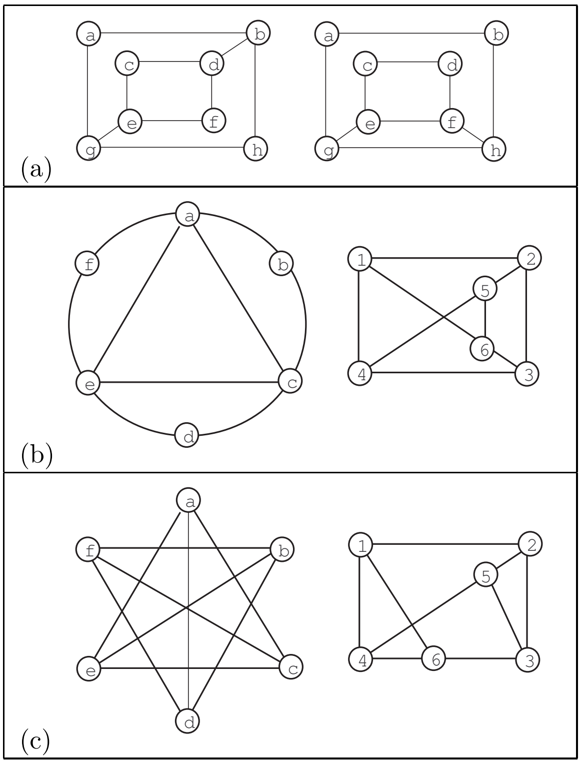



Figura 3:

**Ejercicio 11**

1. Demostrar que dos grafos son isomorfos si y solo si sus grafos complemento lo son.
2. ¿Cuáles de los grafos de la Figura 4 son isomorfos?

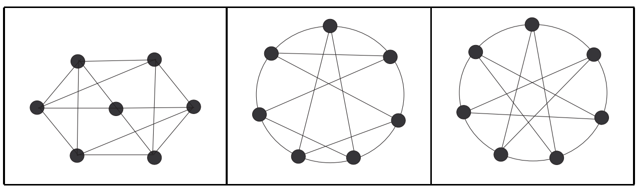


Figura 4:

3. Determinar el número de aristas de $\bar{G}$ en función del número de aristas de $G$.
4. Determinar el número de aristas de un grafo autocomplementario de orden $n$.
5. Construir un grafo autocomplementario de orden 4 y otro de orden 5.
6. Determinar para qué valores de $n$ existe un grafo autocomplementario de orden $n$. Sugerencia: Demostrar que $n$ debe ser de la forma $4k$ o $4k + 1$. Para $n = 4k$, generalizar la estructura del grafo autocomplementario de orden 4 agrupando los vértices en cuatro grupos. Para $n = 4k + 1$ agregar un vértice al grafo anterior y unir en forma adecuada.

**Ejercicio 12**

1. Determinar el orden de un grafo 3–regular con 9 aristas.
2. Ídem con 10 aristas, dos vértices de grado 4 y los demás de grado 3.
3. ¿Existen tales grafos? En caso afirmativo construirlos.

**Ejercicio 13**
Hallar un recorrido o un circuito euleriano para cada grafo de la Figura 5 o demostrar que no existe.

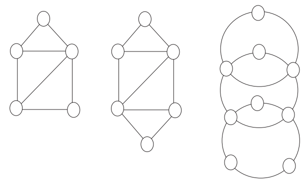


Figura 5:

**Ejercicio 14**
Encontrar un recorrido euleriano para $G = (V, E)$ con $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ y
$E = \{ab, ac, ai, aj, bc, cd, ci, de, df, dg, dh, ef, fg, fh, gh, hi, ij\}$.

**Ejercicio 15**

1. Determinar los valores de $n$ para los cuales el grafo completo $K_n$ tendrá un circuito euleriano.
2. ¿Para cuáles $n$ tiene $K_n$ un recorrido euleriano?

**Ejercicio 16**
Encontrar la longitud máxima de un recorrido en a) $K_6$; b) $K_8$; c) $K_{10}$; d) $K_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

**Ejercicio 17**
Sea $\mathcal{E}$ y $\mathcal{H}$ los conjuntos de grafos Eulerianos y Hamiltonianos respectivamente. Dar un ejemplo de un grafo en $\mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$, otro en $\mathcal{H} \setminus \mathcal{E}$ y otro en $\mathcal{E} \cap \mathcal{H}$.

## EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

**Ejercicio 18**
Encontrar un ciclo Hamiltoniano, si existe, para cada grafo de la Figura 6.

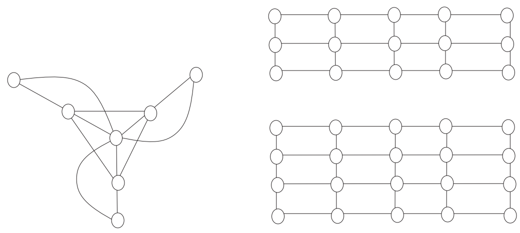


Figura 6:

**Ejercicio 19**
(Examen Febrero 2009) ¿Cuántos vértices tiene un árbol con 16 vértices de grado 1, 20 vértices de grado 2 y el resto de grado 4?

**Ejercicio 20 (Examen 2003)**
Hallar el máximo número de aristas que se le puede quitar a $K_6$ sin que el grafo deje de ser conexo.

**Ejercicio 21 (Parcial 2001)**
Sea $G$ un grafo acíclico, con $n$ vértices y $k$ componentes conexas. Entonces:

A) $G$ tiene $n - k$ aristas.

B) $G$ tiene $n + k - 1$ aristas.

C) $G$ tiene $k(n - 1)$ aristas.

D) $G$ tiene $n - 2k + 1$ aristas.

E) Faltan datos para determinar el número de aristas de $G$.

**Ejercicio 22 (Segundo Parcial 2001)**
Hallar el número de subgrafos conexos recubridores del grafo de la Figura 7, a menos de isomorfismos.

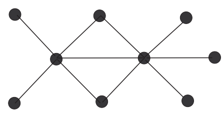


Figura 7:

**Ejercicio 23 (Examen Febrero 2010)**
Dados $k \geq 2$, $v \geq 3$ y un grafo $G$, $k$-regular con $v$ vértices diga cuáles de las siguientes es condición suficiente para que $G$ tenga un ciclo Hamiltoniano.
a) $2k \geq v$; b) $k \leq v$; c) $2k < v$; d) $2k \neq v$

# 9. Planaridad y coloración

## PLANARIDAD

**Ejercicio 1**
Generalizar el Teorema de las regiones de Euler: probar que todo grafo plano $G = (V, E)$ con $\kappa$ componentes conexas verifica que $|V| - |E| + r = \kappa + 1$.

**Ejercicio 2**
Probar que si el grado máximo de los vértices de un grafo es 2, entonces el grafo es plano. ¿Es cierto el recíproco?

**Ejercicio 3**
Dibujar una inmersión en el plano de $K_4$, otra del cubo y otra de $K_{2,8}$.

**Ejercicio 4**
Indicar cuáles de los multigrafos de la Figura 8 son homeomorfos:

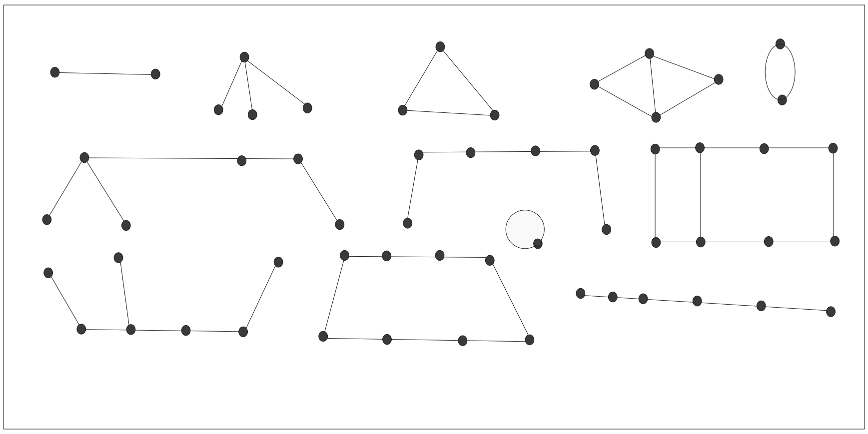


Figura 8:

**Ejercicio 5**
Para los pares de grafos homeomorfos de la Figura 9 obtener un tercero desde el cual los dos primeros se obtengan por subdivisiones elementales.

**Ejercicio 6**

1. ¿Cuántos subgrafos homeomorfos a $K_2$ tiene $C_4$?
2. ¿Cuántos subgrafos homeomorfos a $K_{1,3}$ tiene $W_4$?
3. ¿Cuántos subgrafos homeomorfos a $K_2$ tiene un árbol de orden $n$?

**Ejercicio 7**
Mostrar que si se elimina cualquier arista de $K_5$, el subgrafo resultante es plano. ¿Es esto cierto para el grafo $K_{3,3}$?

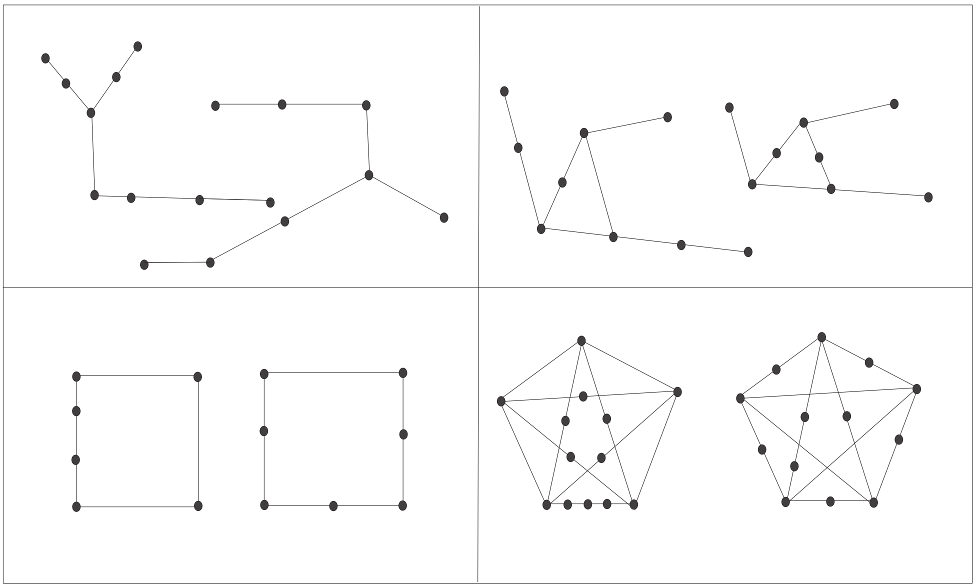


Figura 9:

**Ejercicio 8**
Determinar cuáles de los grafos de la Figura 10 son planos. Dibujar sin aristas solapadas en caso de ser plano Si un grafo es plano. Si no lo es, encuentrar un subgrafo homeomorfo a $K_5$, o $K_{3,3}$.

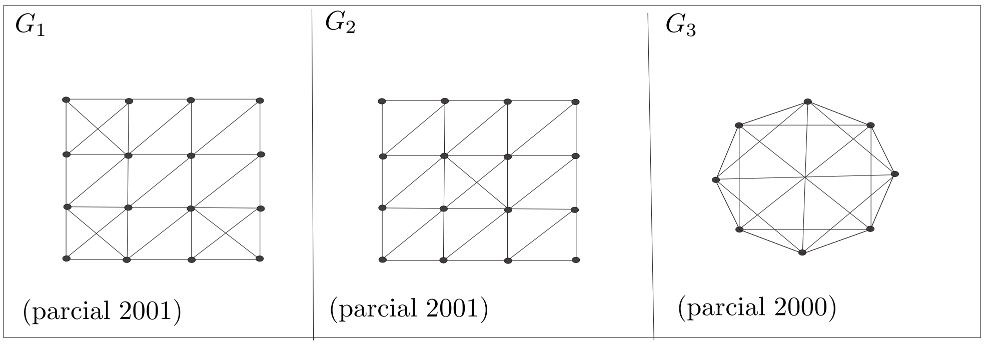



Figura 10:

**Ejercicio 9**
Sea $G = (V, E)$ un grafo no plano. ¿Cuál es el valor más pequeño que puede tener $|E|$?

**Ejercicio 10**
Determinar el número de vértices, aristas y regiones para cada uno de los grafos planos de la Figura 10. Mostrar que sus respuestas satisfacen el teorema de Euler para grafos planos conexos.

**Ejercicio 11**
Sea $(G = (V, E)$ un grafo plano 4-regular conexo sin lazos. Si $|E| = 16$, ¿cuántas regiones hay en una representación plana de $G$?

**Ejercicio 12**

1. ¿Cuántas aristas tiene un grafo conexo 3-regular plano sin lazos y con ocho vértices?,
2. Dibujar un grafo que satisfaga las condiciones de la parte anterior y otro que las satisfaga todas menos la de ser plano.

**Ejercicio 13**
Sea $G = (V, E)$ un grafo plano y cuyas inmersiones planas determinan 53 regiones. Si para alguna inmersión plana de $G$ cada región tiene al menos cinco aristas en su frontera, demostrar que $|V| \geq 82$.

**Ejercicio 14**

1. Demostrar que todo grafo plano tiene un vértice de grado 5 o menor.
2. Demostrar que todo grafo plano con menos de 30 aristas tiene un vértice de grado 4 o menor.
3. Demostrar que en toda inmersión de un grafo plano y conexo con 6 vértices y 12 aristas, cada una de las regiones está limitada por 3 aristas.
4. Demostrar que para todo grafo conexo $G$ con 11 o más vértices, o bien él o su complemento $\overline{G}$ no es plano.

## COLORACIÓN

**Ejercicio 15**
Deducir la fórmula de arista-contracción y sustracción para calcular el polinomio cromático de un grafo.

**Ejercicio 16**
Encontrar una cota superior para el número cromático de un grafo en términos del grado máximo.

**Ejercicio 17**
Encontrar el número cromático de los grafos $K_n$, $K_{m,n}$ y $C_n$.

**Ejercicio 18**
Probar que $\chi(G) = 2$ si y solo si $G$ no tiene ciclos impares.

**Ejercicio 19**

1. Determinar $P(K_{1,3}, \lambda)$.
2. ¿Cuál es el polinomio cromático de $K_{1,n}$? ¿Cuál es su número cromático?
3. ¿Cuáles son los polinomios cromáticos de $P_n$?
4. ¿Cuál es el polinomio cromático de un árbol con $n$ nodos?
5. A partir de la parte anterior encontrar el número cromático de un árbol con $n$ nodos.

**Ejercicio 20**
Hallar el polinomio cromático de $K_{2,n}$.

**Ejercicio 21**
Hallar el polinomio cromático de $C_n$, $K_n$, $\overline{K_n}$, $P_n$ y $K_5$ menos una arista. En cada caso, calcular la cantidad de coloraciones usando 5 colores o menos.

**Ejercicio 22**
Hallar el polinomio cromático del grafo grilla 3x3 y la cantidad de coloraciones usando tantos colores como su número cromático.

**Ejercicio 23**
En los laboratorios químicos JJ, Juanita recibe tres embarques que contienen un total de siete sustancias químicas diferentes. La naturaleza de estas sustancias es tal que para todo $1 \geq i \geq 5$, la sustancia $i$ no puede almacenarse en el mismo compartimiento que la sustancia $i+1$ o la $i+2$. Determinar el menor número de compartimientos separados que Juanita necesitará para almacenar en forma segura estas siete sustancias.