

Grafos III: Planaridad

Grimaldi, 11.4

Ejercicio 1 Dibuje una inmersión en el plano de K_4 , otra del cubo y otra de $K_{2,8}$.

Ejercicio 2 Indique cuales de los multigrafos de la Figura 1 son homeomorfos:

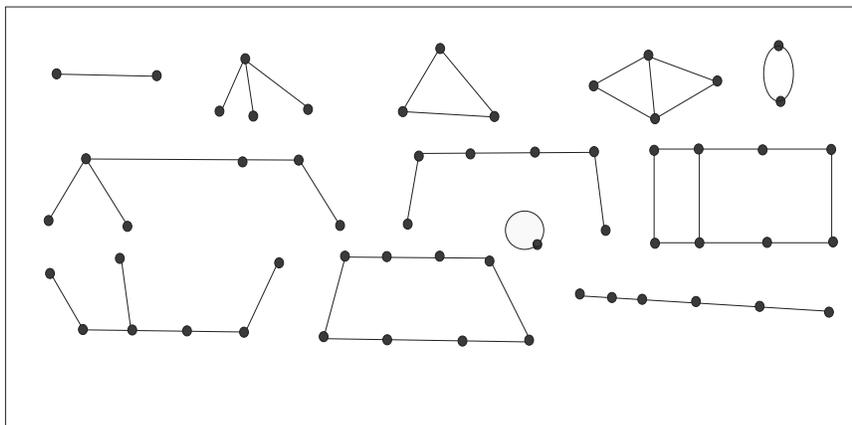


Figura 1

Ejercicio 3 Para los pares de grafos homeomorfos de la Figura 2 obtenga un tercero desde el cual los dos primeros se obtengan por subdivisiones elementales.

- Ejercicio 4**
- a. ¿Cuántos subgrafos homeomorfos a K_2 tiene C_4 ?
 - b. ¿Cuántos subgrafos homeomorfos a $K_{1,3}$ tiene W_4 ? (W_n son los grafos ruedas definidos en el Ej.8,Pr.7).
 - c. ¿Cuántos subgrafos homeomorfos a K_2 tiene un árbol de orden n ?

Ejercicio 5 Muestre que si se elimina cualquier arista de K_5 , el subgrafo resultante es plano. ¿Es esto cierto para el grafo $K_{3,3}$?

Ejercicio 6 Determine cuáles de los grafos de la Figura 3 son planos. Si un grafo es plano, vuelva a dibujarlo sin aristas solapadas. Si no es plano, encuentre un subgrafo homeomorfo a K_5 , o $K_{3,3}$.

Ejercicio 7 Sea $G = (V, E)$ un grafo no plano. ¿Cuál es el valor más pequeño que puede tener $|E|$?

Ejercicio 8 Determine el número de vértices, aristas y regiones para cada uno de los grafos planos de la Figura 3. Luego muestre que sus respuestas satisfacen el teorema de Euler para grafos planos conexos.

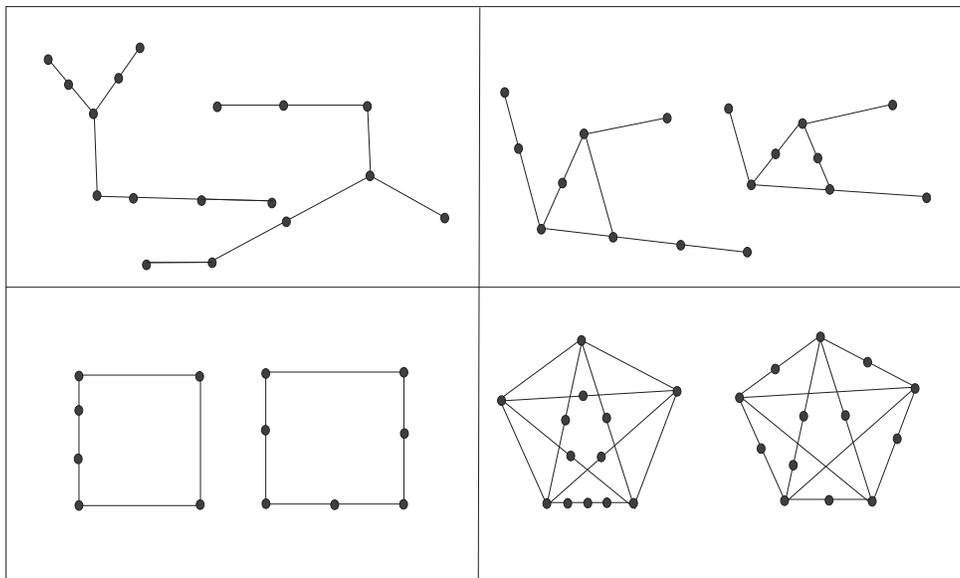


Figura 2

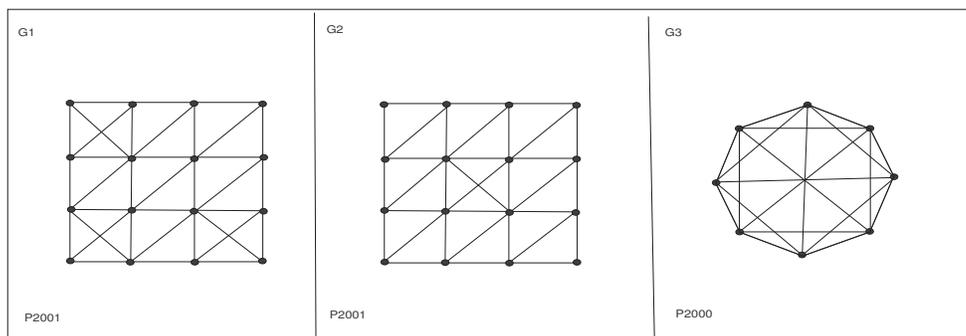


Figura 3

Ejercicio 9 Sea $G = (V, E)$ un grafo plano 4-regular conexo sin lazos. Si $|E| = 16$, ¿cuántas regiones hay en una representación plana de G ?

Ejercicio 10 Suponga que $G = (V, E)$ es un grafo plano con k componentes conexas sin lazos con $|V| = v, |E| = e$. Establezca y demuestre una extensión del teorema de Euler para este grafo.

Ejercicio 11 a) ¿Cuántas aristas tiene un grafo conexo 3-regular plano sin lazos y con ocho vértices?,
 b) Dibuje un grafo que satisfaga las condiciones de la parte anterior y otro que las satisfaga todas menos la de ser plano.

Ejercicio 12 Sea $G = (V, E)$ un grafo plano y cuyas inmersiones planas determinan 53 regiones. Si para alguna inmersion plana de G cada región tiene al menos cinco aristas en su frontera, demuestre que $|V| \geq 82$.

Ejercicio 13 a. Demuestre que todo grafo plano tiene un vértice de grado 5 o menor.

- b. Demuestre que todo grafo plano con menos de 30 aristas tiene un vértice de grado 4 o menor.
- c. Demuestre que en toda inmersión de un grafo plano y conexo con 6 vértices y 12 aristas, cada una de las regiones está limitada por 3 aristas.
- d. Demuestre que para todo grafo conexo G con 11 o más vértices, o bien él o su complemento \overline{G} no es plano.