Matemática Discreta I - 2017

Práctico 3: Funciones y número de Stirling

Ref. Grimaldi Secciones 5.2 y 5.3

Ejercicio 1 Determinar si las siguientes funciones son inyectivas y/o sobreyectivas:

a. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(a) = a - 1$.

b. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(a) = a^3 - 2a$.

c. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(a) = a^3 - 2a$.

d. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(a, b) = a$.

e. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(a, b) = 2^a 3^b$.

f. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(a, b) = 2^a 3^b$.

g. (Del Ej. 6 Examen 28/2/02) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(n, m) = 2^m(2n + 1) - 1$. *Aclaración:* Suponemos que $0 \in \mathbb{N}$.

h. (Del Ej. 6 Examen 28/2/02) $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = 2^y(2x + 1) - 1$.

Ejercicio 2 Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ dos funciones y $g \circ f$ la composición de f con g, es decir que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Si considera que los conjuntos A, B y C son finitos, pruebe o encuentre un contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

a. Si f y g son inyectivas también lo es $g \circ f$.

b. Si f y g son sobreyectivas también lo es $g \circ f$.

c. Si $g \circ f$ es inyectiva también lo es f.

d. Si $g \circ f$ es inyectiva también lo es g.

e. Si $g \circ f$ es sobreyectiva también lo es f.

f. Si $g \circ f$ es sobreyectiva también lo es g.

Ejercicio 3 Dados $A = \{1, 2, \dots, m\}$ y $B = \{1, 2, \dots, n\}$, calcule la cantidad de funciones f de A a B que satisfacen:

a. f es inyectiva.

b. f es biyectiva

c. $f(i) < f(j)$ para todo $i < j$ en A.

d. $f(i) \leqslant f(j)$ para todo $i \leqslant j$ en A.

Ejercicio 4 Sea A un conjunto con 10 elementos y B uno con 3 elementos.

a. ¿Cuántas funciones diferentes de A a B hay?

b. Si denotamos con $\mathcal{P}(X)$ al conjunto de partes de X, es decir al conjunto de todos los subconjuntos de X ¿Cuál es el cardinal de $\mathcal{P}(B)$? ¿y el de $\mathcal{P}(A)$?

c. (Examen Agosto 2003) Considere las funciones $f : B \longrightarrow \mathcal{P}(B)$ que verifican para todo x : $f(x) \neq \{x\}$. ¿Cuántas de dichas funciones hay?

Ejercicio 5 (Parcial 2000)
Considere los conjuntos $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. ¿Cuántas funciones $f : A \to B$ satisfacen $|f(A)| \leq 3$? Indique la opción correcta:

a. $Sob(10, 3)$.

b. $3^{10} - Sob(10, 3)$.

c. $\binom{7}{3}Sob(10, 3) - \binom{7}{2}Sob(10, 2) + \binom{7}{1}Sob(10, 1)$.

d. $\binom{7}{3}Sob(10, 3) + \binom{7}{2}Sob(10, 2) + \binom{7}{1}Sob(10, 1)$.

e. $\binom{7}{3}Sob(10, 3)$.

Ejercicio 6 Dé un argumento combinatorio para probar que para todo n y m naturales vale:

a. $n^m = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} Sob(m, i)$.

b. $Sob(m + 1, n) = n(Sob(m, n - 1) + Sob(m, n))$.

c. $S(m + 1, n) = S(m, n - 1) + nS(m, n)$.

d. $Sob(m, n) = \sum_{i=1}^{m-(n-1)} \binom{m}{i} Sob(m - i, n - 1)$.

e. $n! = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$, donde $d_0 = 1$ y d_k es el número de desarreglos de tamaño k.

En todos los casos, S y Sob indican número de Stirling de 2da especie y de funciones sobreyectivas, respectivamente.