Matemática Discreta I - 2016.
Práctico 9
Grafos: caminos, recorridos, circuitos, conexión, subgrafos.

Grimaldi 11.1, 11.2

Algunas definiciones

Todos los grafos se supondrán simples, es decir, sin artistas múltiples ni lazos. El grafo *completo* K_n tiene n vértices todos unidos entre sí. El *bipartito completo* $K_{n,m}$ tiene $n+m$ vértices n de los cuales están unidos a los otros m, y esas son las únicas adyacencias. El *camino simple* P_n tiene n vértices y todo él es un camino simple. El n–*ciclo* C_n tiene n vértices y todo él es un ciclo. El grafo de *Petersen* es el de la Figura 1. Un grafo es un *árbol* si es conexo y no tiene ciclos.

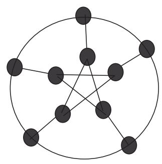

Figura 1: Grafo de Petersen

La *distancia* entre dos vértices a y b de un grafo conexo es la menor de las longitudes de los caminos que los unen. Por ejemplo, la distancia entre el vértice "c" y el vértice "m" del grafo de la Figura 3 es 2. El *diámetro* de un grafo conexo es la mayor de las distancias entre dos vértices cualesquiera. Por ejemplo, el diámetro de P_4 es 3 y el de C_5 es 2.

Ejercicio 1 Para el grafo de la Figura 2, determine:
a) Un camino $b - \cdots - d$ que no sea un recorrido.
b) Un recorrido $b - \cdots - d$ que no sea simple.
c) Un camino simple $b - \cdots - d$.
d) Un camino cerrado $b - \cdots - b$ que no sea un circuito.
e) Un circuito $b - \cdots - b$ que no sea simple.
f) Todos los circuitos simples $b - \cdots - b$.
g) Todos los recorridos simples $b - \cdots - f$.

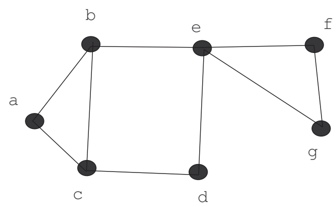

Figura 2:

Ejercicio 2
a) ¿Cuál es la distancia entre d y los demás vértices del grafo de la Figura 3?
b) Halle el diámetro de K_n, $K_{n,m}$, P_n, C_n y el grafo de Petersen (figura 1).

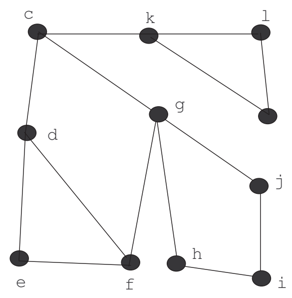

Figura 3:

Ejercicio 3 Determine si se cumple o no que:
a) K_4 contiene un camino que no es un recorrido.
b) K_4 contiene un recorrido que no es ni un circuito ni es simple.
c) K_4 contiene un circuito que no es simple.

Ejercicio 4 ¿Cuántos caminos simples tiene P_4? ¿Y $K_{1,4}$? ¿Y P_n? ¿Y $K_{1,n}$?

Ejercicio 5 (Primer parcial-examen 2002) Sea K_{12} el grafo completo con exactamente 12 vértices. ¿Cuántos caminos simples de longitud 2 tiene K_{12}?

Ejercicio 6 ¿Cuántos caminos de largo n hay entre dos vértices opuestos de C_4?

Ejercicio 7 Para cada natural $n \geq 3$ se define el grafo *rueda de n rayos* como el grafo W_n con $n+1$ vértices v_0, v_1, ..., v_n tal que v_0 es adyacente a todos los demás vértices y $v_1, \ldots, v_n, v_1$ es un ciclo. En la Figura 4 se muestra W_3, W_4 y W_5.

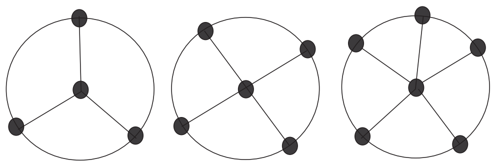

Figura 4:

a) ¿Cuántas aristas tiene W_n?
b) ¿Cuántos ciclos de longitud 3 tiene W_3? ¿y W_4?
c) ¿Cuántos ciclos de longitud 4 tienen W_3, W_4 y W_5?
d) Ídem para ciclos de longitud 5.
e) Ídem para ciclos de longitud 6.
f) Determine cuántos ciclos de longitud k tiene W_n.

Ejercicio 8 Pruebe que si P y Q son dos recorridos simples de longitud la mayor posible, en un grafo conexo, entonces tienen un vértice en común.

Ejercicio 9 Sea G el grafo con conjunto de vértices $\{1, 2, \ldots, 15\}$ donde el vértice i es adyacente al j si y solo si su máximo común divisor es mayor que 1. ¿Cuántas componentes conexas tiene G?

Ejercicio 10 (Segundo examen 2003) Halle el mínimo número de aristas que hay que quitarle a K_6 para que quede desconectado en 2 componentes conexas, ninguna de las cuales sea un vértice aislado.

Ejercicio 11 Encuentre un grafo G que tenga dos vértices u y v tales que

$$\kappa(G-u) = \kappa(G) \qquad \kappa(G-v) > \kappa(G)$$

Ejercicio 12 Un hombre debe cruzar un perro, una oveja y una bolsa de repollos, que están en la otra margen del río, por medio de una canoa. El tamaño de la canoa no permite llevar más de un objeto a la vez y se entiende que luego de cruzar uno de estos no vuelve hacia atrás inmediatamente después con el mismo objeto. Además, no se puede dejar al perro sólo con la oveja ni a la oveja sola con la bolsa de repollos.

1. ¿Cómo se podrá hacer?
2. ¿Puede el hombre realizar el proceso si ha de hacer exactamente 20 viajes? (Un viaje es ir de una margen del río a la otra).

Sugerencia: asociar a cada disposición factible un vértice y unir dos vértices si se puede pasar de dicha disposición a la otra en un solo viaje.

Ejercicio 13 Sea G el grafo de la Figura 5 (a).
a)¿Cuántos subgrafos conexos de G tienen 4 vértices e incluyen un ciclo?
b) Describa el subgrafo G_1 de G (Figura 5 (b)) como un subgrafo inducido y en términos de la eliminación de vértices de G.
c) Ídem para el subgrafo G_2 (Figura 5 (c)).
d) Trace el subgrafo de G inducido por el conjunto de vértices $U = \{b, c, d, f, i, j\}$.
e) Sean e_1 y e_2 las artistas $\{a, c\}$ y $\{a, d\}$ respectivamente del grafo G. Trace los siguientes subgrafos de G: (i) $(G - e_1) - e_2$; (ii) $(G - e_2) - e_1$; (iii) $G - \{e_1, e_2\}$.
f) Encuentre un subgrafo de G que no sea inducido.
g) ¿Qué condición o condiciones debe cumplir un subgrafo para no ser inducido?
h) ¿Cuántos subgrafos recubridores tiene G?
i) ¿Cuántos de los subgrafos anteriores son conexos?
j) ¿cuántos subgrafos de la parte h) tienen el vértice a como vértice aislado?

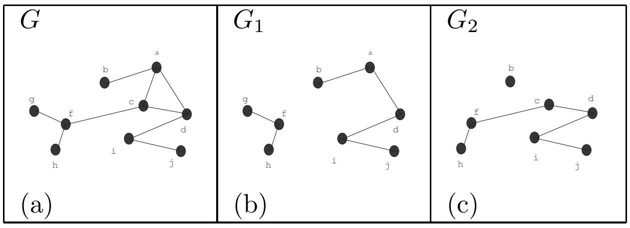

Figura 5:

Ejercicio 14 (Examen marzo 2001) El hipercubo H_n de dimensión n, es el grafo cuyos vértices son las n-uplas de ceros y unos, tales que dos n-uplas son adyacentes si coinciden en todas sus coordenadas salvo exactamente en una de ellas.
a) Halle los conjuntos de vértices de H_1, H_2, H_3 y dibuje dichos grafos.
b) ¿Cuántos vértices y aristas tiene H_n?
c) Halle 2 caminos simples en H_5 de $(0, 0, 1, 1, 0)$ a $(0, 0, 0, 1, 0)$.
d) Demuestre que H_n no tiene 3–ciclos.
e) ¿Cuántos 4–ciclos tiene H_n? *(Sugerencia: considere un vértice fijo y cuente cuántos 4–ciclos pasan por él.)*

Ejercicio 15 Sea G_n el grafo con vértices las n-uplas de 0s y 1s:

$$V(G_n) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \{0, 1\}\}$$

Dos n-uplas serán adyacentes si difieren en los valores de exactamente dos de sus posiciones, coincidiendo en el resto. Por ejemplo, en G_n, $(0, 0, 1)$ es adyacente a $(1, 1, 1)$ y a $(1, 0, 0)$, pero no a $(1, 1, 0)$.
a) Dibuje G_2, G_3 y G_1.
b) ¿Para qué valores de n es G_n conexo?
c) ¿Cuántas componentes conexas tiene G_n?
Sugerencia: sume los 1s de cada vértice.