

# MATEMÁTICA DISCRETA I - 2016

## PRÁCTICO 5

### Funciones Generatrices

Grimaldi 9.1 y 9.2

**Ejercicio 1** Encuentre las funciones generatrices para las siguientes sucesiones (por ejemplo en el caso de la sucesión  $1, 1, 1, \dots$  la respuesta pedida es  $1/(1-x)$  y no  $1+x+x^2+x^3+\dots$  ni  $\sum x^i$ ).

1.  $C_0^6, C_1^6, C_2^6, \dots, C_6^6, \dots$
2.  $C_1^6, 2C_2^6, \dots, 6C_6^6, \dots$
3.  $1, -1, 1, -1, \dots$
4.  $0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$
5.  $0, 0, 0, 3, -3, 3, -3, 3, \dots$
6.  $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$
7.  $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$
8.  $0, 0, 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \dots$
9.  $1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, 32, 0, 64, 0, 128, \dots$
10.  $0, 0, 1, b, a, b^2, a^2, b^3, a^3, b^4, a^4, b^5, a^5, b^6, a^6, b^7, \dots$

**Ejercicio 2** Determine la sucesión generada por cada una de las siguientes funciones generatrices.

1.  $f(x) = (2x - 3)^3$
2.  $f(x) = x^3/(1-x)$
3.  $f(x) = x^3/(1-x^2)$
4.  $f(x) = 1/(1+3x)$
5.  $f(x) = 1/(2-x)$
6.  $f(x) = 3x^6 - 9 + 1/(1-x)$

**Ejercicio 3** (Examen febrero 2010) La función generatriz asociada a la sucesión  $(0, 0, a, 1, 0, a^2, 2, 0, a^3, 3, 0, a^4, 4, 0, a^5, \dots)$  es:

$$\begin{aligned} \text{(A)} f(x) &= \frac{a}{1+ax^3} - \frac{x}{(1+x^6)} & \text{(B)} f(x) &= \frac{a}{1+ax^3} - \frac{x}{(1+x^3)^2} \\ \text{(C)} f(x) &= \frac{aa^2}{1-ax^3} + \frac{x^3}{(1-x^3)^2} & \text{(D)} f(x) &= \frac{a}{1+ax^3} \times \frac{x}{(1+x^3)^2} \end{aligned}$$

**Ejercicio 4**

1. Encuentre el coeficiente de  $x^8$  en  $(1+x+x^2+x^3+x^4+\dots)^{10}$ .
2. Para cada  $n$  natural, encuentre el coeficiente de  $x^8$  en  $(1+x+x^2+x^3+x^4+\dots)^n$ .
3. Para cada natural  $n$  encuentre los coeficientes de  $x^5$ ,  $x^8$  y en general de  $x^r$  en  $(1+x+x^2)(1+x)^n$  para  $0 \leq r \leq n+2$ ,  $r \in \mathbb{N}$ .
4. Encuentre el coeficiente de  $x^{15}$  en las funciones

- a)  $x^3(1 - 2x)^{10}$ .  
 b)  $(x^3 - 5x)/(1 - x)^3$ .  
 c)  $(1 + x)^4/(1 - x)^4$ .

**Ejercicio 5** a) Dé una demostración de la igualdad del Ejercicio 23 del práctico 2 a partir de la igualdad polinómica

$$(1 + x)^k(1 + x)^{N-k} = (1 + x)^N$$

b) Usando la identidad

$$(1 + x)^n(1 + x)^{-n} = 1.$$

demuestre que

$$\sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \binom{n+m-k-1}{n-1} (-1)^{m-k} = 0 \quad \forall m \geq 1.$$

**Ejercicio 6** Halle las funciones generatrices de  $0^3, 1^3, 2^3, 3^3, \dots$  y de  $s_n = \sum_{i=0}^n i^3$ , y deduzca la fórmula

$$\sum_{i=0}^n i^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

**Ejercicio 7** Halle la función generatriz de  $a_n = \frac{d_n}{n!}$  donde  $d_n$  denota los desórdenes de tamaño  $n$ .

**Ejercicio 8** Halle una función generatriz y el coeficiente de la misma que resuelve la parte (a) y (b) del ejercicio 3 del práctico 4. Realice lo mismo si el ejercicio tuviera las siguientes nuevas partes:

- (c)  $x_2$  par.  
 (d)  $x_1$  par y  $x_3$  impar.  
 (e)  $x_4$  primo.

En todos los casos  $0 \leq x_i$  para todo  $1 \leq i \leq 4$ .

**Ejercicio 9** Verifique que  $(1 - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 - x^6)^{-1}$  es la función generatriz de la cantidad de formas en que podemos obtener un número  $n$  como suma de las tiradas de un dado (todas las necesarias).

**Ejercicio 10** Halle la función generatriz de la cantidad de formas que tiene un cajero automático de dar  $n$  pesos. Los cajeros solo poseen billetes de 100, 200, 500 y 1000 pesos.

**Ejercicio 11** Encuentre una fórmula para la convolución  $c_n$  de los siguientes pares de sucesiones:

- $a_n = 1$ , si  $0 \leq n \leq 4$ ;  $a_n = 0$ ,  $\forall n \geq 5$ ,  $b_n = 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
- $a_n = (-1)^n$ ,  $b_n = (-1)^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
- $a_n = 1$ , si  $0 \leq n \leq 3$ ;  $a_n = 0$ ,  $\forall n \geq 4$ ,  $b_n = n$ , si  $0 \leq n \leq 3$ ;  $b_n = 0$ ,  $\forall n \geq 4$ .

**Ejercicio 12** a) Encuentre los primeros tres términos de la convolución  $c_n$  de los siguientes pares de sucesiones:

1.  $a_n = 1, b_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ .
2.  $a_n = 1, b_n = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$ .
3.  $a_n = 1$ , si  $0 \leq n \leq 3$ ;  $a_n = 0, \forall n \geq 4, b_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ .

b) En cada caso halle  $c_n$  para todo  $n$ .

**Ejercicio 13** Halle la función generatriz de

$$0, (-1), 1, 0, 2, 1, 3, 2, \dots, i(i-1), \dots,$$

y una fórmula para  $\sum_{i=0}^n i(i-1)$ .

**Ejercicio 14** (Primer parcial 2009) Sea  $a_n, n \geq 0$ , la cantidad de palabras de  $n$  dígitos, con letras  $A$  y  $B$  tales que después de una  $A$  no puede venir una  $B$  (acá entendemos que hay una única palabra de longitud 0, o sea  $a_0 = 1$ ). Entonces, la función generatriz asociada a  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es:

$$(A) \frac{1}{1-x}. \quad (B) \frac{1}{(1-x)^2}. \quad (C) \frac{x}{(1-x)^2}. \quad (D) \frac{x}{1-x}.$$

**Ejercicio 15** Un parcial consta de 8 preguntas múltiple opción. Cada pregunta bien contestada vale 5 puntos y cada pregunta mal contestada o no contestada 0 puntos. Halle una función generatriz cuyo coeficiente en  $x^p$  indique la cantidad de formas de obtener  $p$  puntos.

**Ejercicio 16** Hallar el coeficiente de grado  $i$  del desarrollo en serie de potencias del producto en convolución  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i}{i!} \times \sum_{i=0}^{\infty} \frac{3^i}{i!}$