

Práctico 3: Funciones y número de Stirling

Ref. Grimaldi Secciones 5.2 y 5.3

Ejercicio 1 Determinar si las siguientes funciones son inyectivas y/o sobreyectivas:

1. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(a) = a - 1$.
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(a) = a^3 - 2a$.
3. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(a) = a^3 - 2a$.
4. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(a, b) = a$.
5. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(a, b) = 2^a 3^b$.
6. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(a, b) = 2^a 3^b$.
7. (del Ej. 6 Examen 28/2/02) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(n, m) = 2^m(2n + 1) - 1$. *Aclaración:* Suponemos que $0 \in \mathbb{N}$.
8. (del Ej. 6 Examen 28/2/02) $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = 2^y(2x + 1) - 1$.

Ejercicio 2 Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ dos funciones y $g \circ f$ la composición de f con g , es decir que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Si considera que los conjuntos A , B y C son finitos, pruebe o encuentre un contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

1. Si f y g son inyectivas también lo es $g \circ f$.
2. Si f y g son sobreyectivas también lo es $g \circ f$.
3. Si $g \circ f$ es inyectiva también lo es f .
4. Si $g \circ f$ es inyectiva también lo es g .
5. Si $g \circ f$ es sobreyectiva también lo es f .
6. Si $g \circ f$ es sobreyectiva también lo es g .

Ejercicio 3 Dados $A = \{1, 2, \dots, m\}$ y $B = \{1, 2, \dots, n\}$, calcule la cantidad de funciones f de A a B que satisfacen:

1. f es inyectiva.
2. f es biyectiva
3. $f(i) < f(j)$ para todo $i < j$ en A .
4. $f(i) \leq f(j)$ para todo $i \leq j$ en A .

Ejercicio 4 Sea A un conjunto con 10 elementos y B uno con 3 elementos.

- ¿Cuántas funciones diferentes de A a B hay?
- Si denotamos con $\mathcal{P}(X)$ al conjunto de partes de X , es decir al conjunto de todos los subconjuntos de X ¿Cuál es el cardinal de $\mathcal{P}(B)$? ¿y el de $\mathcal{P}(A)$?
- (Examen Agosto 2003) Considere las funciones $f : B \rightarrow \mathcal{P}(B)$ que verifican para todo $x : f(x) \neq \{x\}$. ¿Cuántas de dichas funciones hay?

Ejercicio 5 (Parcial 2000) Considere los conjuntos $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. ¿Cuántas funciones $f : A \rightarrow B$ satisfacen $|f(A)| \leq 3$? Indique la opción correcta:

- $Sob(10, 3)$.
- $3^{10} - Sob(10, 3)$.
- $\binom{7}{3} Sob(10, 3) - \binom{7}{2} Sob(10, 2) + \binom{7}{1} Sob(10, 1)$.
- $\binom{7}{3} Sob(10, 3) + \binom{7}{2} Sob(10, 2) + \binom{7}{1} Sob(10, 1)$.
- $\binom{7}{3} Sob(10, 3)$.

Ejercicio 6 Dé un argumento combinatorio para probar que para todo n y m naturales vale:

- $n^m = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} Sob(m, i)$.
- $Sob(m+1, n) = n(Sob(m, n-1) + Sob(m, n))$.
- $S(m+1, n) = S(m, n-1) + nS(m, n)$.
- $Sob(m, n) = \sum_{i=1}^{m-(n-1)} \binom{m}{i} Sob(m-i, n-1)$.
- $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k$, donde $d_0 = 1$ y d_k es el número de desarreglos de tamaño k .

En todos los casos, S y Sob indican número de Stirling de 2da especie y de funciones sobreyectivas, respectivamente.