Matemática Discreta 1 - Edición 2020
Clase 7 (23/03) y Clase 8 (25/03)

En la clase anterior vimos:

- Demostraciones combinatorias. Cálculo de funciones, funciones inyectivas y funciones sobreyectivas (esto último solo para un ejemplo concreto usando diagramas de Venn). Número de Stirling de segundo tipo.

El tema de esta clase son dos principios de conteo importantes: Principio de palomar (PP) y principio de inclusión-exclusión (PIE). Las secciones del Grimaldi para consultar estos temas son 5.5 y 8.1-8.3.

(Recomendación: agarrar lápiz y papel al leer estas notas, para responder algunas cuestiones que se irán planteando a lo largo del texto)

Principio del palomar

El enunciado del PP es algo extremadamente elemental, sin embargo la variedad de problemas que pueden ser atacados utilizando esta idea es bastante sorprendente.

Principio de palomar: Si m palomar ocupan n nidos y $m > n$, entonces habrá un nido con (al menos) dos palomas.

Ejemplo 1. Probar que si se seleccionan 101 enteros del conjunto $S = \{1, 2, \ldots, 200\}$ entonces existen dos números consecutivos.

(Pensarlo por un minuto antes de ver la respuesta. ¿Quienes serían las palomas y los nidos?)

Dem. Los $m = 101$ enteros seleccionados representarían las palomas mientras que los nidos serían los subconjuntos $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\ldots$, $\{199, 200\}$ ($n = 100$ nidos). Como $m > n$, existe un subconjunto $\{i, i+1\}$ donde ambos elementos fueron seleccionados.

Matemáticamente, el PP se expresa como: Si $f : A \to B$ es una función con $|A| > |B|$ entonces f no es inyectiva *(Pensar: ¿Quienes representarian a las palomas y a los nidos?)*.

Dada una función $f : A \to B$, entonces para cada $b \in B$ se define el *conjunto preimagen* de b como $f^{-1}(b) = \{a \in A : f(a) = b\}$ (i.e. el conjunto formado por todos los elementos de A que van a parar a b). Observar que esta definición tiene sentido incluso cuando f no tiene inversa (Pensar: ¿Qué podemos decir sobre los conjuntos preimagenes $f^{-1}(b)$ cuando f es biyectiva?).

Con esta notación de conjunto preimagen, otro enunciado equivalente al PP es el siguiente: Si $f : A \to B$ es una función con $|A| > |B|$ entonces existe $b \in B$ tal que $\#f^{-1}(b) \geq 2$.

El principio del palomar se puede generalizar de la siguiente forma: Si $f : A \to B$ es una función cualquiera entonces existe $b \in B$ tal que $\#f^{-1}(b) \geq |A|/|B|$.

Dem. Por absurdo, supongamos que $\#f^{-1}(b) < \frac{|A|}{|B|}$ para todo $b \in B$. Tenemos que $A = \bigcup_{b \in B} f^{-1}(b)$ (algunos de esos $f^{-1}(b)$ podrían ser vacios), por lo tanto $|A| \leq \sum_{b \in B} \#f^{-1}(b) < \sum_{b \in B} \frac{|A|}{|B|} = |A|$ lo cual es absurdo.

(Pensar: ¿Cómo se obtiene el PP a partir de esta generalización?)

Para culminar veremos algunos ejemplos de aplicación del PP, en el práctico 4 se encuentran varios ejercicios para practicar esta idea y en el libro de Grimaldi también hay varios otros ejemplos resueltos. El primero es similar al Ejercicio 1 pero un poco más difícil.

Ejemplo 2 (pág.276 Grimaldi). Probar que si se seleccionan 101 enteros del conjunto $S = \{1, 2, \ldots, 200\}$ entonces existen dos números tales que uno divide al otro.

Dem. Consideremos la función *parte impar* tal que a cada $n \in \mathbb{Z}^+$ le otorga el mayor divisor impar $\tau(n)$ de n. Por ejemplo si n es impar entonces $\tau(n) = n$, si n es el doble de un impar entonces $\tau(n) = n/2$ y en general, si $n = 2^k h$ con h impar entonces $\tau(n) = h$ (por ej. $\tau(56) = 7$ pues $56 = 8 \cdot 7$). Consideramos el conjunto $A \subseteq S$ de los 101 enteros seleccionados (palomas) y la función $\tau : A \to I = \{1, 3, \ldots, 199\}$ (los elementos de I serían los 100 nidos y τ indica a que nido va a parar cada paloma). Por el PP existen $a_1, a_2 \in A$ tales que tienen la misma parte impar $h := \tau(a_1) = \tau(a_2)$. Esto implica que $a_1 = 2^i h$ y $a_2 = 2^j h$. Si $i \geq j$ resulta a_2 divide a a_1 y si $j \geq i$ resulta que a_1 divide a a_2.

Es muy común el uso del PP en problemas de distribuciones geométricas de puntos.

Ejemplo 3. Dados 5 puntos en el interior de un triángulo equilátero de lado 1, entonces dos de ellos estarán a distancia menor $\frac{1}{2}$.

La demostración se puede consultar en el Grimaldi pág. 277.
(Pista: dividir el triángulo en 4 triángulos equilateros de lado $\frac{1}{2}$).

Ejemplo 4. Dados 11 puntos distintos en el intervalo $(0, 100]$, habrán dos tales que sus raices cuadradas están a distancia menor que 1.

Pensar unos minutos quienes son las palomas y los nidos...

Dem. Sean $x_1, \ldots, x_{11}$ los puntos elegidos. Tenemos que los números $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \ldots, \sqrt{x_{11}}$ (palomas) se distribuyen en los intervalos $(0, 1], (1, 2], \ldots, (9, 10]$ (nidos). Luego habrán dos de ellos $\sqrt{x_i}, \sqrt{x_j}$ en un mismo intervalo $(k, k+1]$, para estos números tenemos $|\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j}| < 1$ como se quería probar.

Principio de inclusión-exclusión (PIE)

Supongamos que tenemos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ciertos subconjuntos de un conjunto grandote U. Denotemos por $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y $A^c = U \backslash A$ (el complemento de A). El PIE nos da una forma de calcular $|A^c|$ en función de ciertas sumas simétricas $S_1, S_2, \ldots, S_n$ (definidas a continuación) que generalmente son más fáciles de calcular. Usaremos en esta parte la notación producto para denotar las intersecciones de conjuntos, por ejemplo $A \cap B$ se denotará simplemente por AB y $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ por $A_1A_2A_3$, etc.

Las sumas simétricas $S_1, S_2, \ldots, S_n$ que mencionábamos anteriormente se definen de la siguiente manera:

- $S_1 = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i|$, la suma de los cardinales de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$[1].
- $S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_iA_j|$, la suma de los cardinales de las intersecciones de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tomados de a dos[2].

[1] Observar que en general $S_1 = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| \geq |A|$. *¿Cuándo se dará el igual?*
[2] En particular esta suma tendrá $\binom{n}{2}$ sumandos.

- $S_3 = \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i A_j A_k|$, la suma de los cardinales de las intersecciones de los conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ tomados de a tres[3].

Así sucesivamente, cada $S_r = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n} |A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_r}|$ es la suma de los cardinales de las intersecciones de los conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ tomados de a r (*¿Cuántos sumandos hay?*) hasta llegar a $S_n = |A_1 A_2 \cdots A_n|$.

A primera vista estas sumas parecen muy complicadas de calcular, sin embargo en la mayoría de los ejemplos interesantes que veremos en el curso resulta que el cardinal de las intersecciones de los A_i solo dependen de cuantos de estos subconjuntos estemos intersectando y no de cuales son esos subconjuntos. Por ejemplo, si queremos calcular S_2 y sabemos que $|A_i A_j| = 13$ para todo $1 \le i < j \le n$ entonces podemos afirmar que $S_2 = 13 \cdot \binom{n}{2}$.

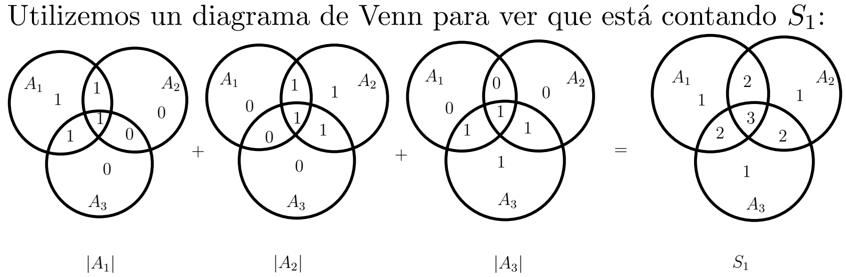
Veremos a seguir como deducir el PIE para tres conjuntos usando diagramas de Venn[4]. En este caso tenemos tres subconjuntos $A_1, A_2, A_3 \subseteq U$, $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ y queremos calcular $|A^c|$ a partir de S_1, S_2 y S_3. En este caso especial tenemos:

- $S_1 = |A_1| + |A_2| + |A_3|$;
- $S_2 = |A_1 A_2| + |A_1 A_3| + |A_2 A_3|$;
- $S_3 = |A_1 A_2 A_3|$.

Sea N la cantidad total de elementos del conjunto universal U y comenzamos observando que

$$|A^c| = N - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| \tag{1}$$

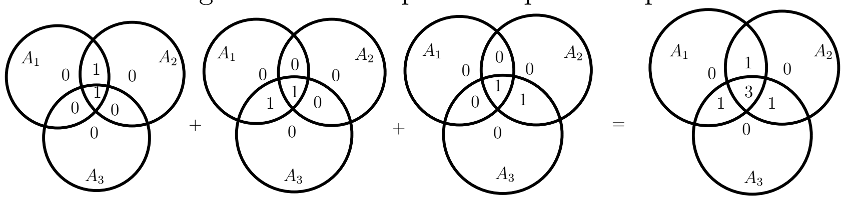
Utilizemos un diagrama de Venn para ver que está contando S_1:



[3]¿Cuántos sumandos tiene esta suma?

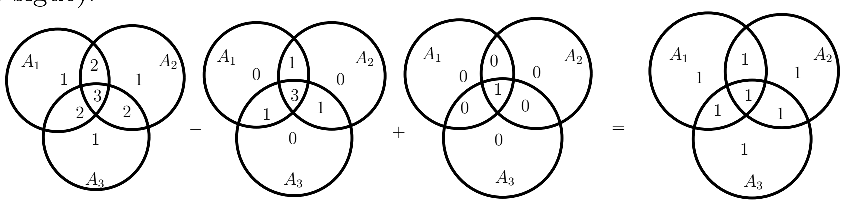
[4]Importante: En estos diagramas los números dentro de las regiones indican las multiplicidades de los elementos, o sea si en una región aparece un número k significa que los elementos de esa región están contados k veces y no que existen k elementos dentro de esa región.

Como podemos ver S_1 cuenta i veces los elementos de A que se encuentran en exactamente en i de los conjuntos A_1, A_2, A_3. Ahora utilizaremos nuevamente un diagrama de Venn para ver que es lo que está contando S_2:



$|A_1.A_2|$ $|A_1.A_3|$ $|A_2.A_3|$ S_2

Vemos que S_2 cuenta $\binom{2}{2} = 1$ vez los elementos que están en exactamente 2 subconjuntos de A_1, A_2, A_3 y $\binom{3}{2} = 3$ veces los elementos de $A_1A_2A_3$. Luego tenemos que $S_1 - S_2 + S_3 = |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$ (ver diagrama de Venn que sigue).



S_1 S_2 S_3 $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$

Sustituyendo $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = S_1 - S_2 + S_3$ en la ecuación (1) tenemos finalmente que $|A^c| = N - (S_1 - S_2 + S_3) = N - S_1 + S_2 - S_3$.

En general vale una fórmula similar:

Principio de inclusión-exclusión (versión conjuntista). Sea U un conjunto universal con N elementos y $A_1, A_2, \dots, A_n$ ciertos subconjuntos de U cuya unión denotamos por A. Si S_i denota la suma de los cardinales de las intersecciones de los subconjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ tomados de a i subconjuntos, entonces:

$$|A^c| = N - S_1 + S_2 - S_3 + \dots + (-1)^n S_n = N + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i S_i.$$

Esta es la versión más clásica del PIE, también conocido como principio de clasificación cruzada. En el libro de Grimaldi (pág.404) el PIE aparece en una forma diferente, aunque equivalente. También partimos de un conjunto universal U con N elementos y consideramos una colección de condiciones $c_1, c_2, \dots, c_n$ respecto de los elementos de U. Llamemos $A_i = \{x \in U :$

x verifica $c_i\}$ y denotemos $N(c_i) = |A_i|$ (por ejemplo si $U = \{1, 2, \ldots, 9\}$ y $c_1 : x$ es par, entonces $A_1 = \{2, 4, 6, 8\}$ y $N(c_1) = 4$). También denotaremos $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. La conjunción[5] de las condiciones $c_1, c_2, \ldots, c_k$ se denota $c_1 c_2 \cdots c_k$ (x verifica $c_1 c_2 \cdots c_k$ si y solo si x verifica c_i para todo $i, 1 \leq i \leq k$). La negación de la condición c se denota por $\overline{c}$. Se observa que en general $\overline{c_1 c_2} \neq \overline{c}_1 \overline{c}_2$ (y en general $N(\overline{c_1 c_2}) \neq N(\overline{c}_1 \overline{c}_2)$). Por ejemplo si ($c_1 : x \in \mathbb{Z}, x$ es par) y ($c_2 : x \in \mathbb{Z}, x \geq 3$) entonces ($\overline{c}_1 \overline{c}_2 : x \in \mathbb{Z}, x$ es impar y $x < 3$), sin embargo ($\overline{c_1 c_2} : x \in \mathbb{Z}, x$ es impar ó $x < 3$). Observemos que número de elementos de U que no verifica ninguna de las condiciones $c_1, c_2, \ldots, c_n$ es $N(\overline{c}_1 \overline{c}_2 \cdots \overline{c}_n) = |A^c|$. Observemos además que para las sumas simétricas tenemos

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}| = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} N(c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k}),$$

. Con estas notaciones tenemos esta otra versión equivalente del PIE.

Principio de inclusión-exclusión (versión Grimaldi). Sea U un conjunto universal con N elementos y $c_1, c_2, \ldots, c_n$ una colección de condiciones respecto de los elementos de U. Con las notaciones mencionadas acima, el número de elementos de U que no verifica ninguna de esas n condiciones es igual a:

$$N(\overline{c}_1 \overline{c}_2 \cdots \overline{c}_n) = N - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + (-1)^n S_n = N + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i S_i.$$

Comentarios sobre la demostración: En la página 405 de Grimaldi aparece una brillante demostración combinatoria de esta fórmula (pedimos para el alumno que la lea!) que no voy a copiar en estas notas. La idea principal es tomar un elemento $x \in U$ y ver cuantas veces ese elemento es contado en cada parte de la igualdad. Observando que si x verifica exactamente k condiciones (de las n condiciones $c_1, c_2, \ldots, c_n$) entonces x es contado en S_i $\binom{k}{i}$ veces. Luego se usa que la suma alternada de una fila (a partir de la fila 1) en el triángulo de Pascal es 0. Observemos las primeras filas del triángulo de Pascal: $1 - 1 = 0, 1 - 2 + 1 = 0, 1 - 3 + 3 - 1 = 0, 1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0$, etc. En general $\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} = 0$ para $k \geq 1$ lo cual es consecuencia de la

[5] En lógica es más común denotar $c_1 \wedge c_2$ la conjunción de c_1 y c_2 en lugar de $c_1 c_2$.

fórmula de potencia de binomio $(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^i b^{k-i}$ con $a=-1, b=1$.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Para terminar este tema veremos algunos ejemplos de aplicación de esta fórmula (hay muchos más ejemplos en el Grimaldi y en el práctico). La idea principal siempre va a ser tomar las condiciones de forma que contar cuantos elementos verifican algunas condiciones sea simple y que lo que deseamos contar sean aquellos elementos que no verifican ninguna de las condiciones.

Recordemos que dos enteros positivos a y b se llaman coprimos (o primos entre si) si no tienen ningún divisor $d > 1$ en común, o lo que es lo mismo, si $\operatorname{mcd}(a,b) = 1$. Sea ahora N fijo. Usando el Teorema Fundamental de la Aritmética[6] Una condición necesaria y suficiente para que n sea coprimo con N es que para primo $p \mid N$ (p divide a N) se tiene $p \nmid n$ (p no divide a n).

Ejemplo 5. ¿Cuántos enteros positivos $n \leq 1000$ son coprimos con $N = 60$?

Dem. Los divisores primos de N son $2, 3$ y 5, luego n es coprimo con 60 si y solo si n no es divisible ni por 2 ni por 3 ni por 5. Consideramos el conjunto universal $U = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$ (que tiene $N = 1000$ elementos) y las condiciones c_1, c_2 y c_3 dadas por: ser múltiplo de 2, ser múltiplo de 3 y ser múltiplo de 5, respectivamente. Queremos calcular $\overline{N}$, el número de elementos de U que no verifica ninguna condición donde $\overline{N} = N - S_1 + S_2 + S_3$ (por el principio de inclusión-exclusión). Observemos que la cantidad de múltiplos de m en el conjunto U viene dado por $\lfloor \frac{1000}{m} \rfloor$ (la parte entera de $\frac{1000}{m}$). Entonces $N(c_1) = \lfloor \frac{1000}{2} \rfloor = 500, N(c_2) = \lfloor \frac{1000}{3} \rfloor = 333$ y $N(c_3) = \lfloor \frac{1000}{5} \rfloor = 200$ por lo que $S_1 = 500 + 333 + 200 = 1033$. Tenemos también[7] $N(c_1c_2) = \lfloor \frac{1000}{6} \rfloor = 166, N(c_1c_3) = \lfloor \frac{1000}{10} \rfloor = 100$ y $N(c_2c_3) = \lfloor \frac{1000}{15} \rfloor = 66$ por lo que $S_2 = 166 + 100 + 66 = 332$. También tenemos $S_3 = N(c_1c_2c_3) = \lfloor \frac{1000}{30} \rfloor = 33$.

[6] Todo entero positivo $n \geq 2$ se escribe de forma única como producto de números primos, a menos del orden de los factores.

[7] Recordar que si p_1 y p_2 son primos distintos, tenemos que n es múltiplo simultáneo de p_1 y p_2 si y solo si n es múltiplo del producto p_1p_2. En general, cuando p_1 y p_2 no son primos, tenemos que n es múltiplo simultáneo de p_1 y p_2 si y solo si n es múltiplo del mínimo común múltiplo $\operatorname{mcm}(p_1, p_2)$.

Luego $\overline{N} = 1000 - 1033 + 332 - 33 = 266$ números menores o iguales a 1000 son coprimos con 60.

Variantes: ¿Qué pasaría si quisieramos contar los enteros positivos $n \leq 1000$ coprimos con 60 y que sean múltiplos de 7?

Uno talvez estaría tentado a proceder como en el ejemplo anterior, agregando una cuarta condición c_4 dada por no ser múltiplo de 7, de esa manera queremos contar aquellos enteros $n \leq 1000$ tales que no verifiquen ninguna de las condiciones c_1, c_2, c_3 y c_4 sin embargo esto es una muy mala idea. Una primera pista de que es una mala idea es el hecho que calcular $N(c_4)$ es más dificil que calcular $N(\bar{c}_4)$ cuando conviene siempre que sea al revés. Pero lo peor de todo es que ahora el cálculo de S_2, S_3 y S_4 se vuelve más complicado. Por ejemplo calcular los $N(c_i c_j)$ y $N(c_i c_j c_k)$ ya no es tan fácil cuando c_4 está incluida dentro de las condiciones. Una mejor idea es restringir el universo de posibilidades de forma que incluya la condición c_4 para que no nos moleste más. Es decir, en lugar de considerar U los enteros positivos $n \leq 1000$ conviene considerar $U = \{7n : 1 \leq n \leq 142\}$ con las mismas condiciones c_1, c_2 y c_3 como en el ejemplo anterior y seguir los mismos pasos.

Consejo: Al atacar un problema de conteo usando el PIE lo primero es considerar condiciones $c_1, \ldots, c_n$ de forma que lo que queremos contar sean los elementos de cierto conjunto U que no verifican ninguna de las condiciones. Conviene en general buscar las condiciones c_i de tal manera que calcular $N(c_i)$ sea más fácil que calcular $N(\bar{c}_i)$. Si eso no ocurre con alguna de las condiciones entonces puede ser una buena idea achicar el universo de posibilidades para que los elementos verifiquen la condición que nos molesta c_i.

Veremos ahora tres aplicaciones importantes: composiciones con desigualdades $x_i \leq c_i$, el número de funciones sobreyectivas y como calcular el número de desordenes de tamaño n.

Recordemos que en la clase anterior vimos como calcular el número de soluciones naturales $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ con restricciones $x_i \geq c_i$ (para ciertos c_i fijos). Sea $c = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$. Entonces la ecuación es equivalente a $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n - c$ sin restricciones, que tiene $\binom{m-1+n-c}{m-1}$ soluciones. Cuando hay restricciones del tipo $x_i \leq c_i$ debemos usar el PIE.

Ejemplo 6. Calcular el número de soluciones naturales de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ tales que $x_1 \leq 6$, $x_2 \geq 1$, $x_3 \leq 5$ y $x_4 \leq 3$.

Solución: En primer lugar sabemos como quitarnos la restricción $x_2 \geq 1$ con cambio de variable. La nueva ecuación se transforma en $x_1+x_2+x_3+x_4 = 9$ con restricciones $x_1 \leq 6$, $x_3 \leq 5$ y $x_4 \leq 3$. Nuestro universo U consistirá de todas las composiciones de 9 de tamaño 4 (i.e. las 4-plas (x_1, x_2, x_3, x_4) tales que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$), su cardinal es $N = \binom{12}{3} = 220$. Consideramos las condiciones $c_1 : x_1 \geq 7$, $c_2 : x_3 \geq 6$ y $c_3 : x_4 \geq 4$. Queremos contar $\overline{N}$, las composiciones de U que no verifican ninguna de las condiciones c_1, c_2 y c_3. Procedemos a contar: $N(c_1) = \binom{5}{3}, N(c_2) = \binom{6}{3}$ y $N(c_3) = \binom{8}{3}$ de donde $S_1 = 86$. Por otra parte no hay soluciones que verifiquen dos o más condiciones de las c_i de donde $S_2 = S_3 = 0$. Por PIE tenemos que $\overline{N} = N - S_1 + S_2 - S_3 = 220 - 86 = 134$.

Ejemplo 7. Calcular el número de funciones sobreyectivas $f : A \to B$ donde $|A| = m$ y $|B| = n$.

Solución. Sin perder generalidad podemos suponer $B = \{1, 2, \ldots, n\}$. Como conjunto universal tomaremos el conjunto de todas las funciones de A en B: $U = \{f : A \to B\}$ cuyo cardinal es $N = n^m$. Consideramos las condiciones $c_1, \ldots, c_n$ dadas por $c_i : i \notin \operatorname{Im}(f)$. Las funciones sobreyectivas $f : A \to B$ son justamente aquellas funciones que no verifican ninguna de las condiciones $c_1, \ldots, c_n$ (pues en ese caso todos los elementos de B estarían en el conjunto imagen de f). Observamos que $f \in U$ verifica las k condiciones $c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_k}$ (sin excluir que pueda cumplir otras condiciones también) si y solo si $f : A \to B \setminus I$ donde $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$. Como $|A| = m$ y $|B \setminus I| = n - k$ entonces existen $(n-k)^m$ de tales funciones. Esto prueba que todos los sumandos que componen S_k son iguales (solo dependen de n, m y k pero no de que condiciones fueron tomadas) y como son $\binom{n}{k}$ sumandos, resulta $S_k = \binom{n}{k}(n-k)^m$. Usando el PIE tenemos:

$$\operatorname{Sob}(m, n) = N - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k S_k = n^m - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}(n-k)^m.$$

Observamos que si colocamos $k = 0$ en la suma obtenemos n^m asi que podemos escribir $\operatorname{Sob}(m, n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}(n-k)^m$.

Ahora vamos a calcular en número de desórdenes de tamaño n. Un desorden de tamaño n es una permutación de $123 \cdots n$ de forma que ninguno queda en su posición original. Por ejemplo no hay desórdenes de tamaño 1, el único desorden de tamaño 2 es 21. Los desórdenes de tamaño 3 son 231 y

312. Otra forma de ver los desórdenes de tamaño n son como funciones biyectivas $f: I \to I$ donde $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ sin puntos fijos (es decir, $f(x) \neq x$ para todo $x \in I$). El número de desórdenes de tamaño n se lo denota d_n.

Ejemplo 8. Calcular d_n, el número de desórdenes de tamaño n.

Solución. Como conjunto U tomemos todas las permutaciones de $12 \cdots n$, su cardinal es $N = n!$. Consideremos las condiciones $c_1, c_2, \ldots, c_n$ donde c_i es la condición de que i aparece en el lugar i. Queremos contar todas las permutaciones $\theta \in U$ tales que no verifique ninguna de esas n condiciones. Observamos que si θ verifica las k condiciones $c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_k}$ entonces las posiciones donde aparecen $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ya están determinadas (pues quedan fijas), para los otros $n-k$ números los podemos colocar en cualquier de las otras $n-k$ posiciones libres, para lo cual tenemos $(n-k)!$ formas de hacerlo. Esto prueba que todos los sumandos de S_k son iguales a $(n-k)!$ por lo tanto $S_k = \binom{n}{k}(n-k)! = \frac{n!}{k!}$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Por el PIE tenemos:

$$d_n = N - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k S_k = n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!}.$$

Ya conseguimos una fórmula para d_n pero podemos ir un poco más lejos. Si dividimos todo entre $n!$ nos queda que $\frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ que es son los $n+1$ primeros términos del desarrollo de Taylor de e^{-1}. Cuando n es grande resulta útil muchas veces aproximar a los efectos de cálculo y obtenemos $\frac{d_n}{n!} \simeq e^{-1}$.