Optimización Continua y Aplicaciones (OCA)

(Obligatorio 5)

Técnicas y Aplicaciones en Optimización con Restricciones

Claudio Risso, Pablo Rodríguez Bocca

3 de noviembre de 2021

El objetivo de este obligatorio es la implementación de técnicas de optimización no-lineal, así como explorar aplicaciones posibilitadas por la enorme escalabilidad de la programación lineal.

1 Gradiente Proyectado

Considere el problema: $(P)\begin{cases} \min & 2x^2+5y^2+2xy-12x-8y+10 \\ \text{s.t.} & x+y\leq 3 \end{cases}$.

Para encontrar el óptimo partiendo de $(x,y)=(0,0)$ se pide: i) agregue variables de holgura para transformar la restricción lineal en una igualdad; ii) use el algoritmo de descenso por gradiente con la técnica del gradiente proyectado y la variante de la búsqueda lineal vista en clase.

2 Programación Primal-Dual con Cortes

Considere el $(P)\begin{cases} \min & 2x^2+5y^2+2xy-12x-8y+10 \\ \text{s.t.} & x^2+y-4\leq 0, \\ & -4x+y^2-4y\leq 0, \\ & x^2-y\leq 0 \end{cases}$ visto en clase.

Implemente en `Matlab` un algoritmo que reproduzca las cálculos presentados en clase, para resolver (P) usando una estrategia de Primal-Dual con cortes de optimalidad en el dual, que es el máster en ese ejemplo.

Como referencia del código tome el siguiente esqueleto:

```
f=@(x) 2*x(1)^2+5*x(2)^2+2*x(1)*x(2)-12*x(1)-8*x(2)+10;
g1=@(x) x(1)^2+x(2)-4;
g2=@(x) -4*x(1)+x(2)^2-4*x(2);
g3=@(x) x(1)^2-x(2);

c=[0 0 0 1]'; A=[0 0 0 1]; b=f([0 2]); lb=[0 0 0 -inf]';

lm=[0 0 0]';
for iter=1:12,
  [xlm,phi]=fminunc(@(x) flm (x,lm), [0 2]');
  dphi=[???];
  if ((sum((dphi<=0)')==3) && (f(xlm)<b(1))), b(1)=f(xlm); end
  A=[A; -dphi 1]; b=[b; phi-dphi*lm];
  [x,fval]=linprog(???);
  lm=x(1:3);
end
```

Agregue el código necesario para registrar la evolución de: la cota superior e inferior del óptimo en cada paso, la estimación de $\Phi(\lambda)$ conseguida con el máster lineal y el valor real de $\Phi(\lambda)$.

3 Riesgo en Portafolios de Inversión

Los portafolios de inversión están entre los ejemplos más clásicos de optimización en finanzas. Si un inversor en un mercado de valores tiene dos instrumentos para invertir: A y B, con retornos fijos al fin del ejercicio (i.e. r_A y r_B conocidos), el monto total de dinero a invertir es 1 (i.e. 100% como referencia) y el inversor puede comprar fracciones positivas x_i de cualquier

instrumento, su decisión óptima surge de resolver:

$$\begin{cases} \max r_A x_A + r_B x_B \\ x_A + x_B = 1, \\ x_A, x_B \geq 0 \end{cases}$$

La solución al problema anterior es poner todo el capital en el instrumento de mayor retorno, que equivale a un enfoque codicioso (greedy). Si, por ejemplo, $r_A = 1.1$ y $r_B = 2$, poniendo todo en B el inversor duplicará su inversión.

Lo anterior asume que la rentabilidad es fija (está garantizada). Esto no es normal en la práctica. Lo usual en cambio es convivir con incertidumbre. Supongamos que el retorno de A sigue siendo determinístico, e igual a 1.1 ($E[r_A] = 1.1$, $\sigma_A^2 = 0$). En cambio, al final del período, B puede tener tres valores posibles: 0, 1 y 2, con probabilidades respectivas: 0.2, 0.3 y 0.5. Ya no es inmediato el apostar todo a B con el argumento que tiene el mejor valor final, aun cuando es el de mayor probabilidad. En cambio, usamos los valores esperados $E[r_A] = 1.1$ y $E[r_B] = 1.3$ para decidir:

$$\begin{cases} \max E[r_A] x_A + E[r_B] x_B \\ x_A + x_B = 1, \\ x_A, x_B \geq 0 \end{cases}$$

y concluimos nuevamente que la solución sigue siendo poner todo al instrumento B, aunque con un retorno esperado 1.3 (no debo esperar 2) ¿Es la anterior la mejor decisión posible? Con ese portafolios hay un 20% de probabilidad de perderlo todo al final del ejercicio. La estrategia es tan codiciosa como arriesgada. Por el contrario, si tomamos $x_A = 1$ y $x_B = 0$ (invertimos los instrumentos), no hay posibilidad de perder y tenemos un retorno seguro de 1.1. Si A también se volatiliza (manteniendo su independencia de B), tomando (por ejemplo) los valores 0.9 y 1.3 con probabilidad 0.5, ya no es posible construir un portafolios seguro.

Los ejemplos anteriores muestran que no es posible en general diseñar portafolios 100% libres de riesgo. Hay que agregar el hecho que la rentabilidad final de algunas opciones de inversión está correlacionada con las de otras, esto es, que no son independientes (sí lo eran en los ejemplos). Existen varios modelos de referencia (frameworks) para diseñar óptimamente un portafolios integrando los elementos anteriores. En este obligatorio veremos dos de ellos.

Modern Portfolio Theory (MPT) o Mean-Variance Analysis

Fue introducido por Harry Markowitz en su ensayo de 1952 titulado "Portfolio Selection" (The Journal of Finance. 7 (1): 77-91), que posteriormente le valió un premio Nobel. Se basa en usar la varianza del portafolios como métrica para el riesgo. Como vimos, los portafolios de varianza 0 son determinísticos (100% seguros). Incluso en caso de no ser posible alcanzar ese valor, la varianza constituye de todos modos una medida de dispersión, esto es, del apartamiento alrededor del valor esperado.

Como datos de entrada se tiene una caracterización estadística básica de los instrumentos de inversión con los que se ha de confeccionar el portafolios. Tomamos una indexación para el conjunto de instrumentos: $\{1, \ldots, N\}$ y asumimos que sus tasas de rentabilidad son variables aleatorias r_i $(1 \leq i \leq N)$, de valores esperados $E[r_i]$ y varianza σ_i^2 conocidos. También asumimos conocidas las covarianzas σ_{ij} entre las rentabilidades de los instrumentos (recordar que $\sigma_{ij} = Covar(r_i, r_j) = E[(r_i - E[r_i])(r_j - E[r_j])]$). Las variables de control x_i representan el peso relativo de cada instrumento en el portafolios, para lo que se asume: $x_1 + ... + x_N = 1$. Así, la rentabilidad del portafolios es otra variable aleatoria con la siguiente expresión: $r = r_1 x_1 + ... + r_N x_N$. La linealidad de la esperanza nos permite calcular la rentabilidad esperada del portafolios como $E[r_1]x_1 + ... + E[r_N]x_N$. Para el cálculo de la varianza del portafolios usamos la propiedad: $Var(aX + bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2ab \times Cov(X, Y)$, de donde $Var(x_i r_i + x_j r_j) = x_i^2 \sigma_i^2 + x_j^2 \sigma_j^2 + 2 x_i x_j \sigma_{ij}$, que es una forma cuadrática semidefinida positiva (la varianza es ≥ 0), representable como: $\begin{bmatrix} x_i & x_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_i^2 & \sigma_{ij} \\ \sigma_{ij} & \sigma_j^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix}$. Generalizando la fórmula por inducción, llegamos a que la varianza del portafolios es $x^T \Sigma x$, donde Σ es la matriz de covarianzas: $((\Sigma))_{ii} = \sigma_i^2$ y $((\Sigma))_{ij} = \sigma_{ij}$ cuando $i \neq j$. El problema de optimización asociado a confeccionar el portafolios de mínima varianza para un nivel de rentabilidad R aspirado es:

$$(MPT) \begin{cases} \min\limits_{x} & x^T \Sigma x \\ \text{s.t.} & \sum\limits_{i=1}^{N} x_i = 1, \\ & \sum\limits_{i=1}^{N} E[r_i] x_i \geq R, \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Conditional Value at Risk (CVaR) o Expected Shortfall

Existen métricas más recientes, denominadas "medidas coherentes de riesgo", que mejoran a la varianza. Una de las métricas populares es el Conditional Value-at-Risk (CVaR), introducida en 2000 por una colectividad académica liderada por R. T. Rockafellar y S. Uryasev. Supongamos conocida la probabilidad de pérdidas de un portafolios.

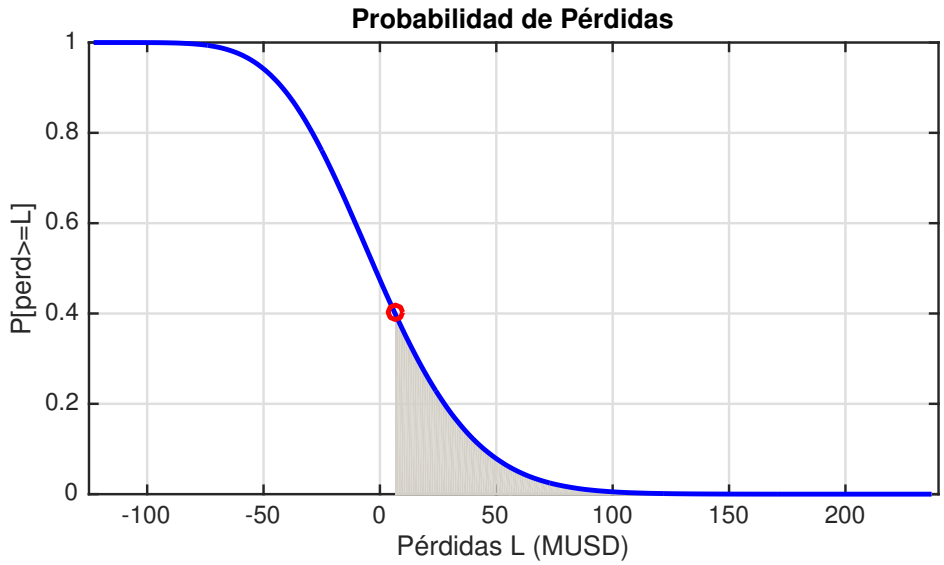

Figura 1: Distribución de las pérdidas sobre el 40% de los peores escenarios.

Fijado un umbral ϵ de probabilidad para las pérdidas, el CVaR es el promedio de las pérdidas entre la fracción ϵ de los escenarios de pérdida más pesimistas. El problema para el portafolios r en este caso sería:

$$(CVaRP) \begin{cases} \min\limits_{x} & CVaR_{\epsilon}(r_1 x_1 + \cdots + r_N x_N) \\ \text{s.t.} & \sum\limits_{i=1}^{N} x_i = 1, \\ & \sum\limits_{i=1}^{N} E[r_i] x_i \geq R, \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

El umbral ϵ es fijado por el usuario. Incluso conociendo la expresión analítica

de las probabilidades de cada instrumento de inversión, el cálculo de su probabilidad conjunta (necesario para calcular las pérdidas como en Fig-1) tiene tantas variables como instrumentos a evaluar, y su cómputo es de elevada complejidad (integrales múltiples de muchas dimensiones). No obstante, Rockafellar y Uryasev probaron que el siguiente problema de programación lineal es un estimador del CVaR:

$$(CVaRE) \begin{cases} \min\limits_{\theta, d_k} & \theta + \dfrac{1}{N\epsilon} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} d_k \\ \text{s.t.} & \theta + d_k \geq loss_k, \\ & d_k \geq 0 \end{cases}$$

donde cada $loss_k$ $(1 \leq k \leq N)$ es una muestra independiente de la variable aleatoria *pérdidas*.

Las actividades previstas en esta sección comprenden las siguientes partes:

a) Suponga que por cada dólar invertido en cierto instrumento financiero, las ganancias netas al instante de pago tienen distribución uniforme entre [-1,2]USD. De darse el valor -1, se perdió toda la inversión (era 1USD). De ser 2 el valor final, se triplica la inversión. La rentabilidad esperada es 0.5 y la desviación 0.8660 (verificar). Si en lugar de la ganancia, pensamos en las pérdidas, su desviación se mantiene y su esperanza es -0.5.

   El cálculo de $CVaR_\epsilon(prd)$ para esa distribución es: $CVaR_{0.3} = 0.55$, $CVaR_{0.2} = 0.7$, $CVaR_{0.1} = 0.85$ y $CVaR_{0.05} = 0.925$. Use `linprog` para verificar que el estimador (CVaRE) tiene un error relativo pequeño, resolviendo el problema de optimización correspondiente usando 10 mil muestras al azar con la distribución anterior. Como referencia de las muestras, usar el siguiente código.

   ```
   N=10e3; loss=-2+3*rand(N,1);
   ```

   Realice diez ejecuciones independientes (distintas semillas) para cada valor del CVaR.

b) Considere ahora el archivo "samples.mat", que tiene 50.000 muestras sintéticas para las utilidades de 8 instrumentos de inversión. Esas muestras han sigo generadas por una máquina pseudo-aleatoria entrenada sobre el

comportamiento histórico de los instrumentos, que captura entre otras propiedades a la correlación entre los resultados de los instrumentos.

A partir de las muestras sintéticas provistas, estime:

- El retorno esperado de cada instrumento.
- La desviación estándar de ese retorno.
- La matriz de covarianzas entre los retornos.
- La matriz de correlaciones asociada.

Haciendo uso de la información anterior y `quadprog`, calcule el portafolios de mínima varianza para las distintas utilidades $R = \{0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25\}$. Analice (intuitivamente) cómo cambian los resultados y la composición de los portafolios a medida que cambia R.

¿Puede asegurar que un portafolios de Markowitz siempre tiene solución?

c) Usando nuevamente los datos sintéticos en "samples.mat", diseñe portafolios CVaR óptimos en lo que refiere a las pérdidas, usando las mismas utilidades target de la parte anterior, y tolerancia a pérdidas de 5% y 10% (i.e. $\epsilon = 0.05$ y $\epsilon = 0.1$).

Presente una tabla con el CVaR óptimo estimado y la proporción de cada instrumento en el portafolios correspondiente. Agregue en cada caso el detalle del tiempo requerido para resolver el problema, separando entre el tiempo de "armado de los datos" y el de la "optimización".

NOTA: Mientras se esté prototipando el problema, se sugiere reducir las muestras usando `samples=samples(1:1000,:)` para bajar los tiempos de manejo de memoria y cálculos. Debido al tamaño de la muestra de datos completa, es posible que se requiera usar matrices `sparse`.

¿Puede asegurar que un portafolios CVaRE siempre tiene solución?