Conceptos básicos de Matemática

Recopilación de materiales

25 de octubre de 2020

Comentarios y consideraciones

El material presentado a continuación surge como una de las tantas acciones concretas que se brindan a la generación ingresante a la Facultad. La idea reside en ofrecer unas notas con temas básicos que se encuentran en los cursos de educación media y que sirven como repaso para afrontar los cursos de matemática del primer año, por tanto el espíritu del material no busca ahondar en tantos detalles como el desarrollo meticuloso de las ideas y demostraciones de los enunciados.
Se invita a los lectores a realizar los ejercicios aquí propuestos dado que es una instancia fundamental en la apropiación del conocimiento.

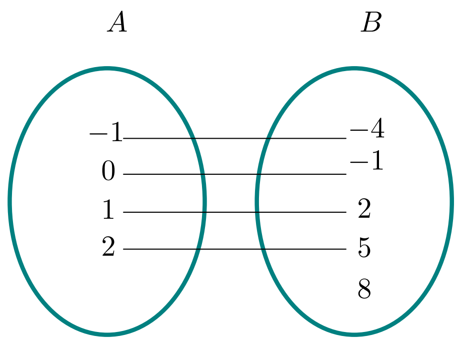
Capítulo 1

Conceptos elementales de funciones

Si A y B son dos conjuntos, una función de A en B, escrita $f : A \to B$ asocia a cada elemento $x \in A$ un único elemento, denotado $f(x) \in B$. El elemento $f(x)$ se llama imagen de x por f y x se llama preimagen de $f(x)$.
Si $f : A \to B$, entonces A se dice que es el dominio de f, B se dice que es el codominio de f y el conjunto $\{f(x) : x \in A\}$ cuyos elementos son las imágenes por f de todos los elementos de A se llama conjunto imagen; usualmente denotado $\mathrm{Im}(f)$. Es también usual que la forma de asociar elementos del dominio con elementos del codominio se haga mediante fórmulas. La misma recibe el nombre de regla de asignación.
Observar que para que dos funciones sean iguales no basta con que las reglas de asignación sean iguales, sino que tanto el dominio como el codominio deben serlo. Si $f : A \to B$ y $g : A' \to B'$ son tal que $f = g$, entonces $A = A', B = B'$ y $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$.
Recíprocamente, si $A = A'$, $B = B'$ y $f(x) = g(x)$, $\forall\, x \in A$, entonces $f = g$.

Ejemplo 1.0.1. *Sea $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ y $B = \{-4, -1, 2, 5, 8\}$ dos conjuntos, en donde los elementos de A están relacionados con los elementos de B, mediante la fórmula $y = 3x - 1$, con $x \in A$ e $y \in B$. Una representación gráfica se muestra en la Figura 1.0.1.*

Ejemplo 1.0.2. *Tomemos $A = [-10, 10]$ y $B = \mathbb{R}$. Sea $f : A \to B$ la función que asigna a cada elemento $x \in A$ el elemento $x^2 + 1 \in B$, esto es tal que su regla de asignación es$f(x) = x^2 + 1$.*
Hallemos Im(f):
Observar que como $x^2 \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, en particular esto se cumple en $A = [-10, 10]$. Entonces $x^2 + 1 \geq 1$ y si tomamos $x = 0$ se tiene $f(0) = 1$. Por otro lado, el valor máximo que puede tomar $f(x)$ es $f(10) = f(-10) = 101$.
Hasta ahora tenemos que Im(f) $\subset [1, 101]$, se nos plantea el problema de determinar si la inclusión es estricta o se cumple la igualdad. Si la igualdad fuera estricta, existe al menos



un elemento del intervalo $[1, 101]$ *que no tiene preimagen. Veamos que sucede:*
Sea $y \in [1, 101]$, $y \in Im(f)$ *si* $\exists\ x \in [-10, 10]$ *tal que* $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + 1 = y \Leftrightarrow x^2 = y - 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y-1}$, *ahora bien,* $1 \leq y \leq 101 \Leftrightarrow 0 \leq y - 1 \leq 100 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{y-1} \leq 10$. *Por tanto* y *tiene al menos una preimagen, el número* $\sqrt{y-1} \in [-10, 10]$ *concluyendo que* $Im(f) = [1, 101]$.

Queda como ejercicio determinar $f(S)$ *y* $f^{-1}(R)$ *siendo* $S = [2, 5]$ *y* $R = [82, 101]$

Ejemplo 1.0.3. *Consideremos las funciones:*

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ /\ f(x) = x^2$,
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ /\ g(x) = \frac{(2x)^2}{4}$
- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\ /\ h(x) = x^2$

Aquí es claro que las funciones f *y* g *son iguales, mientras que las funciones* f *y* h *no lo son ya que su codominio no es el mismo (este punto será más fácil de entender cuando repasemos la inyectividad y sobreyectividad de funciones).*

1.1. Inyectividad y Sobreyectividad.

Pasamos ahora a estudiar algunas características de las funciones,

Definición 1.1.1 (Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva)**.** *Sea* $f : A \to B$

- *Decimos que* f *es inyectiva si*

$$\forall\, x,\, y\, \in A\,;\ si\ f(x) = f(y)\ \ implica\ que\ x = y. \tag{1.1}$$

- *Decimos que f es sobreyectiva si*

$$\forall\, y \in B,\ \exists\, x \in A\ /\ f(x) = y. \tag{1.2}$$

- *Decimos que una función es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.*

Observación: Es condición necesaria y suficiente para que una función $f : A \to B$ sea inyectiva, que se cumpla el contra recíproco de la afirmación 1.1. Es decir, $f : A \to B$ es inyectiva, si y sólo si

$$\forall\, x,\, y\, \in A,\ \text{con } x \neq y, \text{ se cumple que } f(x) \neq f(y).$$

Ejemplo 1.1.1. *Consideremos las siguientes funciones:*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x^2$
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *tal que* $f(x) = x^2$.
3. $h : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ *tal que* $h(x) = x^2$.
4. $i : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *tal que* $i(x) = x^2$.

Se puede ver de inmediato que se trata de cuatro funciones distintas.
La función f no es ni inyectiva ni sobreyectiva ya que $f(-1) = f(1) = 1$ y de aquí que no es inyectiva, además $f(x) = x^2 \geq 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, de aquí que no existe ningún elemento en el dominio de f tal que su correspondiente sea, por ejemplo, -2. Así la función f tampoco es sobreyectiva.

La función g no es inyectiva por el mismo motivo que f no lo es. Sin embargo, g es sobreyectiva ya que si $y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ entonces existe su raíz cuadrada, tomando $x = \sqrt{y}$ tenemos que $g(x) = x^2 = (\sqrt{y})^2 = y$.

La función h es inyectiva, verifiquemos esto:
Si $x,\, y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ entonces tenemos que $f(x) = f(y)$ implica que $x^2 = y^2$, tomando raíz cuadrada tenemos que $\sqrt{x^2} = \sqrt{y^2}$, es decir, $|x| = |y|$, pero como $x,\, y \geq 0$ tenemos que $|x| = x$ e $|y| = y$, de donde concluimos que $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$. Por el mismo motivo que f, h no es sobreyectiva.

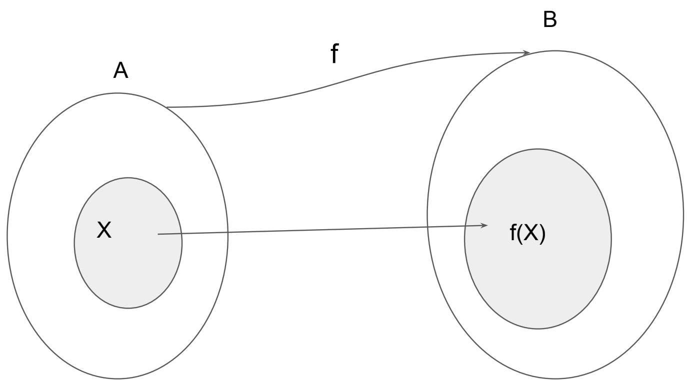


Figura 1.1: Conjunto Imagen

Utilizando las mismas herramientas que utilizamos con las funciones f, g y h es inmediato verificar que i es una función inyectiva y sobreyectiva, es decir, biyectiva.

Observación: Queda totalmente aclarado, que si dos funciones tienen distinto codominio, no pueden ser iguales. Por ejemplo, las funciones f y g anteriores sólo difieren en su codominio, pero g es sobreyectiva y f no. De igual modo, si dos funciones tienen distinto dominio, no son iguales.

1.2. Imagen y Preimagen

Retomemos las ideas sobre la imagen y preimagen del principio de la sección.

Definición 1.2.1 (Conjunto Imagen)**.** *Dada una función $f : A \to B$ y un conjunto X; $X \subset A$, llamamos* **imagen** *de X por f al conjunto*

$$f(X) = \{f(x) \;/\; x \in X\} = \{y \in B \;/\; y = f(x), x \in X\}.$$

Aprovechemos la definición anterior, para definir el **recorrido de una función**, éste lo definimos como la imagen del dominio, es decir, si $f : A \to B$ entonces el **recorrido** de f es $f(A)$.

Definición 1.2.2 (Conjunto preimagen). *Consideremos una función $f : A \to B$ y un conjunto Y; $Y \subset B$, llamamos preimagen de Y por f al conjunto*

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \ / \ f(x) \in Y\}.$$

Nuevamente aquí puede surgir una duda que más vale no tenerla. Al anotar al conjunto preimagen de Y con $f^{-1}(Y)$, para nada estamos hablando de la función inversa de f, es más, hasta el momento no sabemos que significa "función inversa". Al anotar $f^{-1}(Y)$ hay que remitirse a la definición, o sea: $f^{-1}(Y) = \{x \in A \ / \ f(x) \in Y\}$. Ver Figura 1.2.

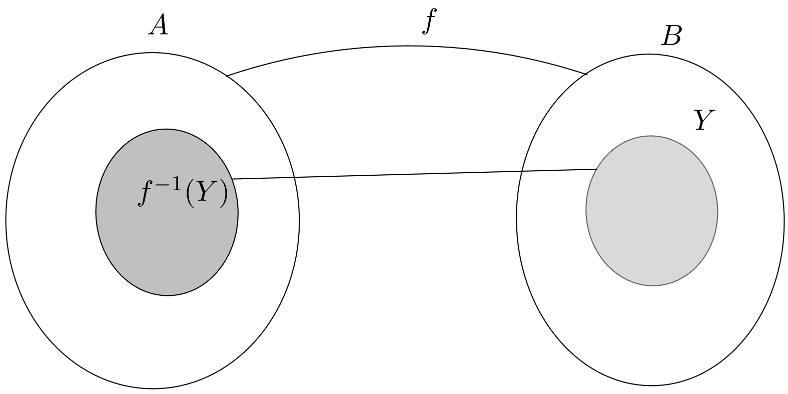


Figura 1.2: Conjunto Preimagen

Demos algún ejemplo de conjunto preimagen.

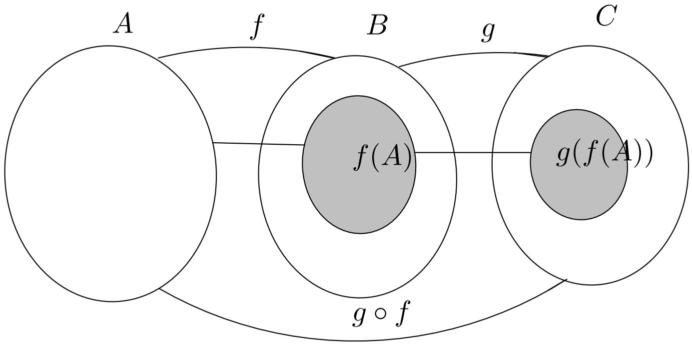
Ejemplo 1.2.1. *Consideremos las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ y $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = sen(x)$. Hallemos el conjunto preimagen del conjunto $\mathbb{Z}$ por f y el conjunto preimagen del conjunto $\mathbb{R}^+$ por g. $f^{-1}(\mathbb{Z}) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R}$ ya que $f(x) = 1 \in \mathbb{Z} \ \forall \ x \in \mathbb{R}$. Mientras que $g^{-1}(\mathbb{R}^+) = \{x \in [0, 2\pi] \ / \ sen(x) \in \mathbb{R}^+\} = (0, \pi)$ ya que $sen(0) = sen(\pi) = sen(2\pi) = 0$ y $sen(x) < 0$ si $x \in (\pi, 2\pi)$.*

1.3. Composición

Definición 1.3.1 (Función compuesta). *Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$, tal que $f(A) \subset B$, definimos la función compuesta de f con g, a la que anotamos $g \circ f$, mediante:*

$$g \circ f : A \to D \ \text{ tal que } \ (g \circ f)(x) = g(f(x)) \ \forall \ x \in A.$$

Es bueno notar, que si bien, al hacer la composición de f con g, no son necesariamente utilizados todos los elementos del conjunto B, la función $g \circ f$ está bien definida, ya que para todo $x \in A$ existe un elemento $y \in D$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.

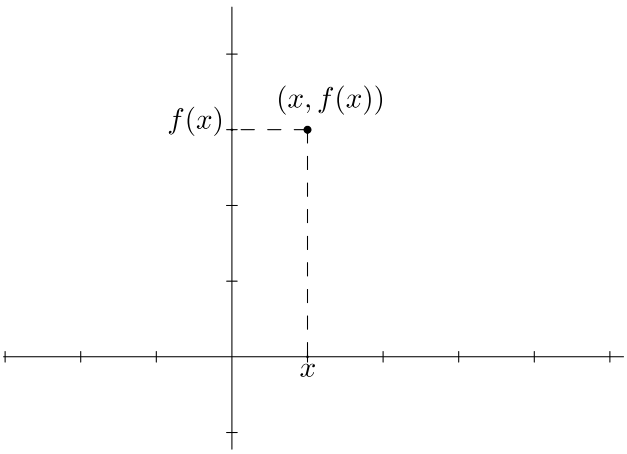


1.4. Gráfico de una función

Adelantándonos un poco al capítulo siguiente consideraremos un subconjunto de reales, $X \subset \mathbb{R}$ y una función $f : X \to \mathbb{R}$ con una determinada regla de asignación $f(x) = y$, además tomaremos un sistema de ejes cartesianos. Para cada $x \in X$, existe un único $y \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$ y por tanto podemos considerar el par ordenado $(x, f(x)) \in X \times \mathbb{R}$. Como $X \subset \mathbb{R}$, se tiene que el par $(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. (Usualmente se denota $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ como $\mathbb{R}^2$.) Por tanto el par $(x, f(x))$ puede ser asociado con un único punto del plano $\mathbb{R}^2$ cuyas coordenadas son las anteriormente mencionadas. Tomando en cuenta las consideraciones anteriores tenemos la siguiente

Definición 1.4.1. *Sea $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, se llama gráfico de f y se denota $G(f)$ al conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ tal que sus coordenadas son de la forma $(x, f(x))$.*

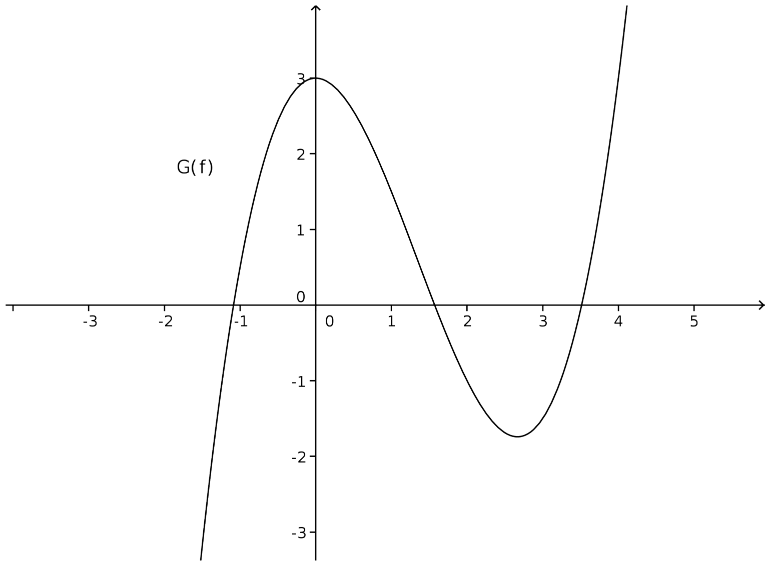
$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \textit{tal que}\ x \in X,\ \ y = f(x)\}$$



Ejemplo 1.4.1. *Consideremos por ejemplo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x^3}{2} - 2x^2 + 3$. Podemos*

realizar una tabla de valores para calcular algunas imágenes y obtener puntos del gráfico de f.

x	$f(x)$
0	3
-1	$1/2$
3	$-3/2$
1	$3/2$



Ejercicio 1. 1. *Se considera* $X = \{-3,-1,0,2,4,7\}$ *como dominio de* f *y* $B = \{-2,-1,0,1,3,\pi,8,10\}$ *tal que* $f(-3) = 0,\ f(-1) = 8,\ f(0) = \pi,\ f(2) = 8,\ f(4) = 3,\ f(7) = 1$. *Representar mediante un diagrama de flechas y efectuar el gráfico de* f *en un sistema de ejes cartesianos.*

2. *Se considera* $h : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ *tal que* $h(x) = \frac{x+2}{x-1}$, *calcular* $h(0),\ h(-1),\ h(\pi), h(\sqrt{2}), h(3)$.

3. *Se considera* $g : \mathbb{R} \setminus \{0,2\} \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(x) = \frac{(2x+1)^2}{x^2-2x}$, *calcular* $g(1), g(-1), g(3), g(-\sqrt{3}), g(-\pi), g(1/3), g(x+1), g(x-1)$.

4. *Sea* $j : \mathbb{R}\setminus\{-3\} \to \mathbb{R}$ *tal que* $j(x) = \frac{x^2+x}{x+3}$ *y* $k : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ *tal que* $k(x) = \frac{1}{x}$. *Determinar si son posibles las siguientes composiciones, en caso contrario determinar una función de dominio más amplio posible cuya regla de asignación sea la que se obtendría mediante la composición.*

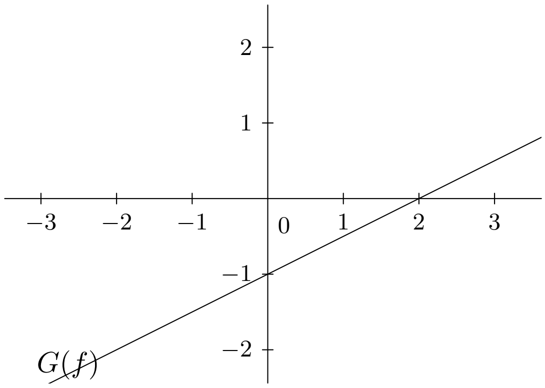
a) $j \circ k$

b) $k \circ j$

c) $j(cx)$, $c \in \mathbb{R}$

d) $k(cx)$, $c \in \mathbb{R}$

5. *Se considera $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que su gráfico se representa en la siguiente figura: Sin*



encontrar la expresión de f, hallar el gráfico de las siguientes funciones:

a) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $h(x) = f(x) + 1$.

b) $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $i(x) = f(x) - 2$.

c) $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $j(x) = f(x + 1)$.

d) $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $l(x) = f(x - 1)$.

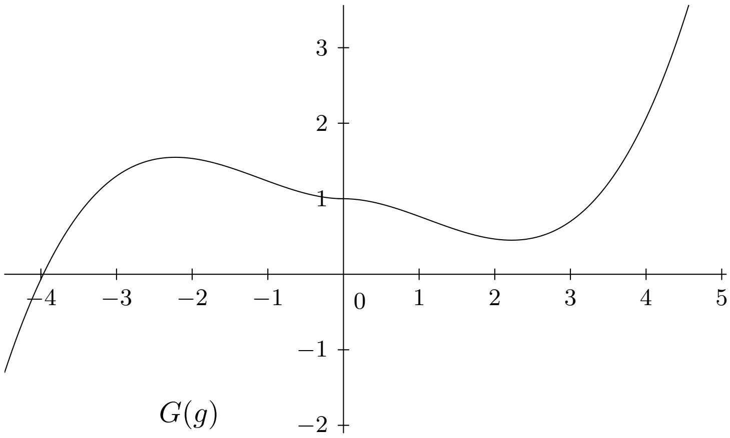
e) $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $m(x) = f(-x)$.

f) $n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $n(x) = -f(x)$.

g) $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $r(x) = -f(-x)$.

h) $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $p(x) = 2f(x)$.

6. *Se considera $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuyo gráfico se muestra a continuación, hallar los gráficos de*



las funciones de forma análogas a lo hecho en la parte anterior.

7. *Deducir una regla general a partir de lo observado en las partes 5 y 6.*

8. *Graficar las siguientes funciones:*

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x$.

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(x) = 2x$.

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $h(x) = -2x$.

d) $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $i(x) = |x|$.

e) $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $j(x) = |x| - 1$.

f) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $k(x) = |x| + x$.

g) $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $l(x) = x^2$.

h) $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $p(x) = x^2 - 1$.

i) $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $q(x) = x^2 + x$.

j) $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $r(x) = -x^2 + 1$.

k) $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $s(x) = 2x^2 - 2x - 4$.

9. Graficar las siguientes funciones:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x \leq 0 \\ 0 & si \quad x > 0 \end{cases}$

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(x) = \begin{cases} -x & si \quad x \leq 0 \\ x & si \quad x > 0 \end{cases}$

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $h(x) = \begin{cases} 2x+1 & si \quad x \leq 1 \\ -3 & si \quad x > 1 \end{cases}$

d) $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $i(x) = \begin{cases} x-3 & si \quad x < -1 \\ 0 & si \quad x \geq -1 \end{cases}$

e) $j : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ *tal que* $j(x) = \begin{cases} -x^2 & si \quad x < 2 \\ x+2 & si \quad x > 2 \end{cases}$

f) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $k(x) = \begin{cases} -5 & si \quad x = 1 \\ x^2 - 1 & si \quad x \neq 1 \end{cases}$

g) $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $l(x) = \begin{cases} -1 & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$

Bibliografía

[1] **Friedberg**, *Linear Algebra*. Prentice Hall.

[2] **Kudriávtsev**, *Curso de Análisis Matemático*. Ed. Mir Moscú.

[3] **Giovaninni**, *Funciones Reales*.

[4] **Siberio**, *Ficha N° 1: Álgebra 1*. Centro de Impresiones y Publicaciones del CEIPA.

[5] **Barberis**, *Ingreso 2011 Área Matemática*. Universidad Nacional de Río Cuarto, Facultad de Ciencias Exactas Físico-Químicas y Naturales.