# Práctico 4: Inducción completa

**Ejercicio 1 (IC en sumatorias)**
*Probar las siguientes igualdades por el método de inducción completa:*

1. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

   **Solución:** *Tomamos de caso base $n=1$. Para este valor se tiene que $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ por lo tanto el caso base es cierto.*

   *Ahora el paso inductivo, la hipótesis de inducción es $\sum_{i=1}^{h} i = \frac{h(h+1)}{2}$ y queremos probar $\sum_{i=1}^{h+1} i = \frac{(h+1)(h+2)}{2}$. Para esto operamos y usamos la hipótesis inductiva (en la segunda igualdad)*

$$\sum_{i=1}^{h+1} i = \sum_{i=1}^{h} i + (h+1) = \frac{h(h+1)}{2} + (h+1) = \frac{h^2+h+2h+2}{2} = \frac{(h+1)(h+2)}{2}$$

   *esto prueba el paso inductivo, terminando la inducción completa y probando lo pedido.*

2. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   **Solución:** *Tomamos de caso base $n=1$. Para este valor se tiene que $\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$, por lo tanto el caso base es cierto.*

   *Ahora el paso inductivo, la hipótesis de inducción es $\sum_{i=1}^{h} i^2 = \frac{h(h+1)(2h+1)}{6}$ y queremos probar $\sum_{i=1}^{h+1} i^2 = \frac{(h+1)(h+2)(2(h+1)+1)}{6}$. Al igual que antes, operamos y usamos la hipótesis de inducción (en la segunda igualdad)*

$$\sum_{i=1}^{h+1} i^2 = \sum_{i=1}^{h} i^2 + (h+1)^2 = \frac{h(h+1)(2h+1)}{6} + (h+1)^2.$$

   *Ahora una opción es aplicar distributiva y seguir como en 1. Una alternativa es no distribuir los factores que aparecen en las cuentas, esto lo logramos sacando de factor común $(h+1)$, de esta manera:*

$$\frac{h(h+1)(2h+1)}{6} + (h+1)^2 = (h+1)\left(\frac{h(2h+1)}{6} + h + 1\right) =$$
$$(h+1)\left(\frac{h(2h+1)+6h+6}{6}\right) = \frac{(h+1)(2h^2+7h+6)}{6}.$$

   *Ahora el polinomio $2h^2+7h+6$ tiene raíces $-2$ y $-\frac{3}{2}$ por lo tanto se puede factorizar en la forma $2(h+2)(h+\frac{3}{2}) = (h+2)(2h+3) = (h+1)(h+2)(2(h+1)+1)$. Resumiendo*

$$\sum_{i=1}^{h+1} i^2 = \frac{(h+1)(2h^2+7h+6)}{6} = \frac{(h+1)(h+2)(2(h+1)+1)}{6}$$

   *terminando de probar el paso inductivo, lo que prueba la inducción completa.*

3. *Si $a \neq 1$, entonces $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ (suma geométrica).*

**Solución:**
*Tomamos de caso base $n=0$. Para este valor se tiene que* $\sum_{i=0}^{0} a^i = 1 = \frac{1-a}{1-a}$, *por lo tanto el caso base es cierto.*
*Ahora el paso inductivo, la hipótesis de inducción es* $\sum_{i=0}^{h} a^i = \frac{1-a^{h+1}}{1-a}$ *y queremos probar* $\sum_{i=0}^{h+1} a^i = \frac{1-a^{h+2}}{1-a}$.
*Operemos y usemos la hipótesis de inducción*

$$\sum_{i=0}^{h+1} a^i = \sum_{i=0}^{h} a^i + a^{h+1} = \frac{1-a^{h+1}}{1-a} + a^{h+1} = \frac{1-a^{h+1}}{1-a} + \frac{(1-a)a^{h+1}}{1-a}$$
$$= \frac{1-a^{h+1}}{1-a} + \frac{a^{h+1}-a^{h+2}}{1-a} = \frac{1-a^{h+2}}{1-a}$$

*esto prueba el paso inductivo y por lo tanto queda probada la inducción completa.*

4. a) $\sum_{i=1}^{n} i(i+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$.
   b) *Probar la igualdad anterior utilizando las partes 1 y 2 de este ejercicio.*

**Solución:**

a) *Tomamos de caso base $n=1$. Para este valor se tiene que* $\sum_{i=1}^{1} i(i+2) = 3 = \frac{1(1+1)(2+7)}{6}$ *por lo tanto el caso base es cierto.*
*Ahora el paso inductivo, la hipótesis de inducción es* $\sum_{i=1}^{h} i(i+2) = \frac{h(h+1)(2h+7)}{6}$ *y queremos probar* $\sum_{i=1}^{h+1} i(i+2) = \frac{(h+1)(h+2)(2(h+1)+7)}{6}$. *Para esto operamos y usamos la hipótesis inductiva (en la segunda igualdad)*

$$\sum_{i=1}^{h+1} i(i+2) = \sum_{i=1}^{h} i(i+2) + (h+1)(h+3) = \frac{h(h+1)(2h+7)}{6} + (h+1)(h+3).$$

*Ahora podemos seguir como en 2, sacando de factor común $(h+1)$, de esta manera:*

$$\frac{h(h+1)(2h+7)}{6} + (h+1)(h+3) = (h+1)\left(\frac{h(2h+7)}{6} + h + 3\right) =$$
$$(h+1)\left(\frac{h(2h+7)+6h+18}{6}\right) = \frac{(h+1)(2h^2+13h+18)}{6}.$$

*Ahora si desarrollamos el polinomio $(h+2)(2(h+1)+7)$, obtenemos exactamente el polinomio $2h^2+13h+18$. Resumiendo*

$$\sum_{i=1}^{h+1} i(i+2) = \frac{(h+1)(2h^2+13h+18)}{6} = \frac{(h+1)(h+2)(2(h+1)+7)}{6}$$

*terminando de probar el paso inductivo, lo que prueba la inducción completa.*

b) *Para resolverlo aplicando 1 y 2, observar que $i(i+2) = i^2+2i$, por lo tanto,*

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+2) = \sum_{i=1}^{n} (i^2+2i) = \sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\frac{n(n+1)}{2}$$

*Sacando de factor común $n(n+1)$, obtenemos*

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1)\left(\frac{2n+1}{6}+1\right)=$$
$$n(n+1)\left(\frac{2n+1+6}{6}\right)=\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

*terminando la prueba.*

**Ejercicio 2 (Aplicación)**
*Sobre un tablero (8 × 8) de ajedrez, se intentan colocar:*

- *1 grano de arroz en el primer casillero,*
- *2 granos en el segundo casillero,*
- *4 granos en el tercer casillero,*
- *8 granos en el cuarto casillero,*
- *y así hasta el sexagésimocuarto (64-ésimo) casillero.*

*Al final, ¿cuántos granos de arroz habría sobre el tablero?*

**Solución:** Debemos hacer la suma de $1=2^0, 2=2^1, 4=2^2, 8=2^3, \ldots, 2^{63}$, es decir

$$2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{63}$$

lo cual, por el ejercicio anterior, es igual a:

$$\frac{1-2^{64}}{1-2}=2^{64}-1$$

**Ejercicio 3 (IC en desigualdades)**

1. *Completar el siguiente cuadro:*

| $n$ | $2^n$ | $2n+1$ | $n^2$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 2 | 3 | 1 |
| 2 | 4 | 5 | 4 |
| 3 | 8 | 7 | 9 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| 10 | $2^{10}$ | 21 | 100 |

2. a) *Se considera el enunciado matemático $P(n): 2^n \geq 2n+1$. Completar, con la ayuda del cuadro anterior, la siguiente tabla indicando si el enunciado $P(n)$ es verdadero (V) o falso (F) para el valor de n indicado:*

| $n$ | $P(n)$ | $P(n+1)$ |
|---|---|---|
| 0 | V | F |
| 1 | F | F |
| 2 | F | V |
| 3 | V | V |
| 4 | V | V |
| 5 | V | V |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

b) *Probar que para todo natural $n \geq 3$ se tiene que $2^n \geq 2n+1$.*

**Solución:**

*Primero probamos el caso base para $n = 3$. Se tiene que $2^3 = 8$ y $2 \times 3 + 1 = 7$, por lo que se cumple la desigualdad.*

*El paso inductivo consiste en demostrar que si $2^h \geq 2h+1$ entonces $2^{h+1} \geq 2(h+1)+1$.*

*Demostración:*

$2^{h+1} = 2(2^h) \geq 2(2h+1)$ *y como* $2(2h+1) \geq 2h+3 = 2(h+1)+1$ *y terminamos de probar el paso inductivo.*

*Por lo tanto la desigualdad es verdadera entonces para todo $n \geq 3$.*

3. *Repetir la tabla de 2 a) para el enunciado $P(n) : 2^n \geq n^2$. Hallar $n_0$ y probar por inducción completa que para todo natural $n \geq n_0$ se cumple que $2^n \geq n^2$.*

   **Solución:**

   *Vemos que el caso base se da en $n_0 = 4$. Primero probamos el caso base para $n_0 = 4$. Se tiene la igualdad: $2^4 = 16 \geq 16 = 4^2$, por lo que se cumple la desigualdad.*

   *El paso inductivo consiste en demostrar que si $2^h \geq h^2$ entonces $2^{h+1} \geq (h+1)^2$. Nuevamente escribimos $2^{h+1} = 2(2^h)$ y usando la hipótesis de inducción tenemos $2(2^h) \geq 2h^2$. Para concluir hay que probar que $2h^2 \geq (h+1)^2$, lo cual es cierto pues $h \geq 4$ (hay que mostrarlo) y terminamos de probar el paso inductivo.*

   *Por lo tanto la desigualdad es entonces verdadera para todo $n \geq 4$.*

## Ejercicio 4 (IC y divisibilidad)

1. *Probar que para todo $n \geq 1$, $n^3 - n$ es divisible por 3.*

   **Solución:** *Se razona por inducción completa a partir de $n = 1$.*

   - ***Caso base** ($n = 1$):* $1^3 - 1 = 0$ *es divisible por* 3.
   - ***Paso inductivo:*** *Fijado $h \geq 1$, supongamos que $h^3 - h$ es divisible por 3 (HI). Queremos demostrar que $(h+1)^3 - (h+1)$ es divisible por 3 (¿TI?) Para ello, se observa que*

   $$\begin{aligned} (h+1)^3 - (h+1) &= (h^3 + 3h^2 + 3h + 1) - (h+1) \\ &= h^3 + 3h^2 + 2h \\ &= \underbrace{(h^3 - h)}_{\substack{\text{div. por 3} \\ \text{por HI}}} + \underbrace{3(h^2 + h)}_{\text{div. por 3}}. \end{aligned}$$

   *Como el entero $h^3 - h$ es divisible por 3 (por HI) así como el entero $3(h^2 + h)$ (de modo obvio), se deduce que su suma, igual a $(h+1)^3 - (h+1)$, también es divisible por 3. Esto demuestra la tesis de inducción (TI).*

   *Por lo tanto, $n^3 - n$ es divisible por 3 para todo $n \geq 1$.*

2. *Probar que para todo $n \geq 1$, $3^{2n} - 1$ es divisible por 8.*

   **Solución:**

   ***Caso base***

   *Para $n = 1$, tenemos que*

   $$3^{2\cdot 1} - 1 = 9 - 1 = 8,$$

   *y como 8 es obviamente divisible por 8, se cumple el paso base.*

   ***Paso inductivo***

*Suponemos que se cumple $3^{2h} - 1 = 8k$ para algún $k$ natural (esto es otra forma de escribir que es divisible por ocho), y queremos ver que $3^{2(h+1)} - 1$ es divisible por 8.*

*Entonces:*

$$\begin{aligned}
3^{2h} - 1 &= 8k & \Rightarrow \\
(3^{2h} - 1) \cdot 3^2 &= 8k \cdot 3^2 & \Rightarrow \\
3^{2h+2} - 3^2 &= 8k \cdot 3^2 & \Rightarrow \\
3^{2h+2} - 3^2 - 1 + 1 &= 8k \cdot 3^2 & \Rightarrow \\
3^{2h+2} - 1 &= 8k \cdot 3^2 + 3^2 - 1 & \Rightarrow \\
3^{2h+2} - 1 &= 8k \cdot 3^2 + 8 & \Rightarrow \\
3^{2(h+1)} - 1 &= 8(k \cdot 3^2 + 1)
\end{aligned}$$

*Por lo que probamos que $3^{2(h+1)} - 1$ es divisible por ocho.*

3. *Probar que para todo $n$ impar, $7^n + 1$ es divisible por 8.*

   **Solución:**
   *Observemos que todo natural impar $n$ lo podemos escribir como $2h + 1$ para algún entero $h \geq 0$. Haremos entonces inducción en $h$.*

   ***Caso base*** *Tenemos que*

   $$7^1 + 1 = 8$$

   *que es divisible por 8.*

   ***Paso inductivo***

   *Supongamos que $7^{2h+1} + 1$ es divisible por 8, y a partir de esto, probemos que $7^{2(h+1)+1} + 1$ es también divisible por 8.*

   *Entonces:*

   $$\begin{aligned}
   7^{2h+1} + 1 &= 8m & \Rightarrow \\
   (7^{2h+1} + 1)7^2 &= 8m \cdot 7^2 & \Rightarrow \\
   7^{2h+1}7^2 + 7^2 &= 8m \cdot 7^2 & \Rightarrow \\
   7^{2h+3} + 7^2 + 1 - 1 &= 8m \cdot 7^2 & \Rightarrow \\
   7^{2(h+1)+1} + 7^2 + 1 - 1 &= 8m \cdot 7^2 & \Rightarrow \\
   7^{2(h+1)+1} + 1 + 48 &= 8m \cdot 7^2 & \Rightarrow \\
   7^{2(h+1)+1} + 1 &= 8m \cdot 7^2 - 48 & \Rightarrow \\
   7^{2(h+1)+1} + 1 &= 8(m \cdot 7^2 - 6) & \Rightarrow
   \end{aligned}$$

   *Por lo que $7^{2(h+1)+1} + 1$ es divisible por 8.*

4. *Probar que la suma de tres números naturales consecutivos, siendo el menor impar, es divisible por 6.*

   **Solución:**
   *Observar que podemos reformular la afirmación de la siguiente manera:*

   *Para todo $n$ impar, $n + (n + 1) + (n + 2)$ es divisible por 6.*

*Observemos que todo natural impar $n$ lo podemos escribir como $2h+1$ para algun entero $h \geq 0$. Haremos entonces inducción en $h$.*

***Caso base*** *Tenemos que*

$$1+2+3=6,$$

*y como 6 es obviamente divisible por 6, se cumple el paso base.*

***Paso inductivo***

*Supongamos que $2h+1+(2h+2)+(2h+3)$ es divisible por 6, y a partir de esto, probemos que $2(h+1)+1+(2(h+1)+2)+(2(h+1)+3)$ es también divisible por 6.*

*Si desarrollamos, obtenemos:*

$$2(h+1)+1+(2(h+1)+2)+(2(h+1)+3) = 2h+2+1+(2h+2+2)+(2h+2+3) = 2h+1+(2h+2)+(2h+3)+6.$$

*Como $2h+1+(2h+2)+(2h+3)$ es divisible entre 6 y 6 también los es, tenemos que $2(h+1)+1+(2(h+1)+2)+(2(h+1)+3)$ es divisible entre 6, terminando el paso inductivo, lo que prueba la inducción completa.*

*A modo de comentario, si hubieramos desarrollado usando que $n=2h+1$, obteniamos la siguiente reformulación:*

*Para todo $h \geq 0$, $2h+1+(2h+2)+(2h+3) = 6h+6$ es divisible por 6.*

*Lo cual claramente es verdadero ya que $6h+6 = 6(h+1)$.*

**Ejercicio 5 (Ejercicios de pruebas anteriores)**

1. *Probar la siguiente igualdad utilizando el método de inducción completa:*

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2, \quad \forall n \geq 1.$$

2. *Demostrar que*

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2+n}{2}, \quad \forall n \geq 1$$

*a partir del ítem anterior, SIN usar inducción completa.*

**Solución:**

1. - *Paso base: Si $n=1$,*

$$\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2-1 = 1,$$

*y por otro lado $1^2 = 1$, por lo que la propiedad es válida para $n=1$.*

- *Paso inductivo:*
    - *Hipótesis inductiva: Supongamos $m \in \mathbb{N}$ que*

$$\sum_{i=1}^{m}(2i-1) = m^2.$$

- *Tesis inductiva:*
$$\sum_{i=1}^{m+1}(2i-1) = (m+1)^2.$$

**Demostración:** *Para demostrar la tesis inductiva comenzamos escribiendo*
$$\sum_{i=1}^{m+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{m}(2i-1) + 2(m+1) - 1 = \sum_{i=1}^{m}(2i-1) + 2m + 1.$$

*Por hipótesis inductiva,*
$$\sum_{i=1}^{m}(2i-1) = m^2$$

*y sustituyendo en la igualdad anterior obtenemos que*
$$\sum_{i=1}^{m+1}(2i-1) = m^2 + 2m + 1.$$

*Esto último es igual a* $(m+1)^2$ *y concluimos la prueba.*

2. *A partir de la parte anterior, ahora queremos probar que para todo natural* $n$*:*
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2+n}{2}.$$

*Para esto comenzamos observando que*
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(2i-1) &= (2\cdot 1-1)+(2\cdot 2-1)+\cdots+(2\cdot n-1)\\ &= 2\cdot(1+\cdots+n)-n\\ &= 2\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)-n.\end{aligned}$$

*Usando la parte anterior obtenemos que*
$$n^2 = 2\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)-n,$$

*o equivalentemente*
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2+n}{2}.$$

**Ejercicio 6 (Ejercicios de pruebas anteriores)**
*Considerar la desigualdad*
$$(n+2)\sqrt{n} \geq 3\sqrt{n^2+1}$$

1. *Hallar el menor natural para el cual la desigualdad es válida.*

2. *Demostrar por Inducción Completa la desigualdad, a partir de la base inductiva hallada en la parte anterior.*

**Solución:**

1. El primer $n$ para el cual la desigualdad es válida es $n = 5$

2. Vamos a probar por IC que $(n+2)\sqrt{n} \geq 3\sqrt{n^2+1}\ \forall\ n \geq 5$. El caso base lo tenemos probado en la parte anterior para $n = 5$. La hipótesis de inducción nos dice que:

$$(h+2)\sqrt{h} \geq 3\sqrt{h^2+1} \Leftrightarrow (h+2)^2 h \geq 9(h^2+1)$$

y queremos la tesis inductiva, es decir:

$$(h+1+2)\sqrt{h+1} \geq 3\sqrt{(h+1)^2+1} \Leftrightarrow (h+1+2)^2(h+1) \geq 9((h+1)^2+1)$$

Hemos usado que las expresiones involucradas son siempre positivas para que sea un si y solo si.

Entonces:

$$(h+1+2)^2(h+1) = [(h+2)^2 + 2(h+2) + 1](h+1)$$
$$= (h+2)^2 h + (h+2)^2 + 2(h+2)(h+1) + (h+1) \geq 9(h^2+1) + (h+2)^2 + 2(h+2)(h+1) + (h+1)$$

donde la última desigualdad utilizamos la hipótesis de inducción.

Basta probar entonces que $\forall\ n \geq 5$, se cumple que:

$$9(h^2+1)h + 2(h+2)(h+1) + (h+1) \geq 9((h+1)^2+1)$$

Operando resulta que

$$9(h^2+1) + (h+2)^2 + 2(h+2)(h+1) + (h+1) \geq 9((h+1)^2+1) \Leftrightarrow 3h^2 - 7h = h(3h-7) \geq 0$$

Observar que los cambios de signo de $h(3h-7)$ se dan en $h = 0$ y $h = 7/3 \approx 2,33$. Por tanto resulta que para todo $h \geq 5$ se cumple que $h(3h-7) \geq 0$ probando la tesis inductiva y completando la demostración.