Ejercicio 4.2.b

Supongamos $a_n = c \cdot a_{n-1} + g(n)$ $\forall n \geq 1$ y $a_0 = b_0$.
Probaremos por inducción completa que tenemos la fórmula general:

$$a_n = c^n \cdot b_0 + \sum_{i=1}^{n} g(i)c^{n-i}.$$

Como **caso base** tomamos $n = 1$: Por un lado, por definición

$$a_1 = c \cdot a_0 + g(1).$$

Por el otro, la fórmula $c^n \cdot b_0 + \sum_{i=1}^{n} g(i)c^{n-i}$ queda

$$c \cdot b_0 + \sum_{i=1}^{1} g(i)c^{1-i} = c \cdot b_0 + g(1)c^0.$$

Como coinciden, tenemos que la propiedad vale para $n = 1$.
Hipótesis inductiva:
Supongamos que para cierto h natural la propiedad es cierta, es decir

$$a_h = c^h \cdot b_0 + \sum_{i=1}^{h} g(i)c^{h-i}.$$

Tesis inductiva:
La propiedad también vale para $h + 1$. Es decir,

$$a_{h+1} = c^{h+1} \cdot b_0 + \sum_{i=1}^{h+1} g(i)c^{h+1-i}$$

.

Demostración Hipótesis inductiva $\Rightarrow$ Tesis inductiva:

Por definición tenemos por un lado

$$a_{h+1} = c \cdot a_h + g(h + 1).$$

Si usamos la hipótesis inductiva, podemos sustituir a_h por $c^h \cdot b_0 + \sum_{i=1}^{h} g(i)c^{h-i}$ y así obtenemos

$$a_{h+1} = c \cdot (c^h \cdot b_0 + \sum_{i=1}^{h} g(i)c^{h-i}) + g(h+1).$$

De aquí en más, reagruparemos esta expresión para llegar al miembro derecho de la tesis inductiva.

Observando que $c \cdot c^h = c^{h+1}$ y que $g(h+1) = g(h+1) \cdot c^{h+1-(h+1)}$ obtenemos

$$c \cdot (c^h \cdot b_0 + \sum_{i=1}^{h} g(i)c^{h-i}) + g(h+1) =$$

$$= c^{h+1} \cdot b_0 + \sum_{i=1}^{h} c \cdot g(i) \cdot c^{h-i} + g(h+1) \cdot c^{h+1-(h+1)} =$$

$$= c^{h+1} \cdot b_0 + \sum_{i=1}^{h+1} g(i)c^{h+1-i}$$

.