# Práctico 4: Inducción completa

**Ejercicio 1 (IC en sumatorias)**
*Probar las siguientes igualdades por el método de inducción completa:*

1. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. *Si* $a \neq 1$, *entonces* $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ *(suma geométrica).*
4. a) $\sum_{i=1}^{n} i(i+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$.

   b) *Probar la igualdad anterior utilizando las partes 1 y 2 de este ejercicio.*

**Ejercicio 2 (Aplicación)**
*Sobre un tablero (8 × 8) de ajedrez, se intentan colocar:*

- *1 grano de arroz en el primer casillero,*
- *2 granos en el segundo casillero,*
- *4 granos en el tercer casillero,*
- *8 granos en el cuarto casillero,*
- *y así hasta el sexagésimocuarto (64-ésimo) casillero.*

*Al final, ¿cuántos granos de arroz habría sobre el tablero?*

**Ejercicio 3 (IC en desigualdades)**

1. *Completar el siguiente cuadro:*

| $n$ | $2^n$ | $2n+1$ | $n^2$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 10 | | | |

2. a) *Probar que para todo natural* $n \geq 3$ *se tiene que* $2^n \geq 2n+1$.

   b) *Se considera el enunciado matemático* $P(n): 2^n \geq 2n+1$. *Con ayuda del cuadro anterior completar la siguiente tabla indicando si el enunciado es verdadero (V) o falso (F):*

| $n$ | $P(n)$ | $P(n+1)$ |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |

3. *Repetir la tabla anterior, para el enunciado* $P(n): 2^n \geq n^2$. *Hallar* $n_0$ *y probar por inducción completa que para todo natural* $n \geq n_0$ *se cumple que* $2^n \geq n^2$.

**Ejercicio 4 (IC y divisibilidad)**

1. *Probar que para todo* $n \geq 1$, $n^3 - n$ *es divisible por 3.*
2. *Probar que para todo* $n \geq 1$, $3^{2n} - 1$ *es divisible por 8.*
3. *Probar que para todo* $n$ **impar**, $7^n + 1$ *es divisible por 8.*
4. *Probar que la suma de tres números naturales consecutivos, siendo el menor impar, es divisible por 6.*

**Ejercicio 5 (Ejercicios de pruebas anteriores)**

1. *Probar la siguiente igualdad utilizando el método de inducción completa:*

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2, \quad \forall n \geq 1.$$

2. *Demostrar que*

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2 + n}{2}, \quad \forall n \geq 1$$

*a partir del ítem anterior, SIN usar inducción completa.*

**Ejercicio 6 (Ejercicios de pruebas anteriores)**
*Considerar la desigualdad*

$$(n+2)\sqrt{n} \geq 3\sqrt{n^2+1}$$

1. *Hallar el menor natural para el cual la desigualdad es válida.*
2. *Demostrar por Inducción Completa la desigualdad, a partir de la base inductiva hallada en la parte anterior.*