Práctico 3: Razonamiento lógico

Ejercicio 1 (Conectivas "y" ($\wedge$), "o" ($\vee$))
Mostrar que cada una de las propiedades siguientes se puede expresar en lenguaje matemático por un enunciado "P y Q" o "P o Q" (x e y son números reales):

1. $(x-2)(x+3)=0$.
2. $x^2-1=0$.
3. $xy>0$.
4. $(x-2)(x-3)\neq 0$.
5. $x^2-1\neq 0$.
6. $xy\leq 0$.

Ejercicio 2 (Condición necesaria y suficiente ($\Leftrightarrow$))

1. *Dado un número real x cualquiera, nos interesamos en la afirmación "$x^2>4$".*
   Determinar si cada una de las condiciones siguientes es suficiente para dicha afirmación:

   a) $x>100$
   b) $x>10^6$
   c) $x>1,9$
   d) $x<-2$
   e) $x<-2$ *o* $x>2$
   f) $x<-10$
   g) $x<-2,1$
   h) $x<-3$ *o* $x>3$
   i) $x<0$

   Entre las que son suficientes, indicar cuáles son necesarias.

2. *Nos interesamos ahora en la afirmación "$x^2>10^3$".*
   Dar seis condiciones suficientes para dicha afirmación, y una necesaria y suficiente.

Ejercicio 3 (Condición necesaria y suficiente ($\Leftrightarrow$))
En cada uno de los casos siguientes, modificar la condición suficiente dada para que sea necesaria y suficiente:

1. *Sea x un real positivo. Si $x>4$ entonces $x^2>10$.*
2. *Sean x e y reales no negativos. Si $x>0$ e $y>0$ entonces $x+y>0$.*

Ejercicio 4 (Condición necesaria y suficiente ($\Leftrightarrow$))
En cada uno de los casos siguientes, completar la condición necesaria dada para que sea necesaria y suficiente:

1. *Para que un cuadrilátero ABCD sea un rombo, es necesario que sus diagonales sean perpendiculares.*
2. *Para que dos rectas del espacio sean paralelas, es necesario que su intersección sea vacía.*
3. *Para que los tres números reales a,b,c sean positivos, es necesario que $ab>0$ y que $bc>0$.*

Ejercicio 5 (Cuantificadores ($\forall$, $\exists$))
Para cada una de las proposiciones siguientes, indicar (en los puntos "...") el cuantificador que permite que dicha proposición sea verdadera. En los casos que utilices $\exists$, analizar la unicidad. Si exite un único número que lo cumple los simpolizamos así: $\exists!$

1. $\ldots x\in\mathbb{R},\ (x+1)^2=x^2+1$.
2. $\ldots x\in\mathbb{R},\ (x+1)^2=x^2+2x+1$.
3. $\ldots a,\ b,\ c\in\mathbb{R},\ a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0$.
4. $\ldots x\in\mathbb{R},\ x^3-2x^2+1=0$.
5. $\ldots x\in\mathbb{R},\ \sin^2(x)+\cos^2(x)=1$
6. $\ldots x\in\mathbb{R},\ \sin(x)=\cos(x)$

Ejercicio 6 (Negación)
Completar el cuadro siguiente:

P	*no P*
$x \in \mathbb{N}$	
$x \neq 1$	
$13 = 12$	
$x > 0$	
$x \leq 1$	

Ejercicio 7 (Negación) *Completar el cuadro siguiente:*

P	P (v o f)	*no P* (v o f)	*no P*
Todos los triángulos son rectángulos			
Existe un real x tal que $x^2 < 0$			
Todos cuadrilátero no se puede inscribir en una cfa.			
Existen triángulos que tienen ángulos obtusos			
Todos los números reales verifican $x^2 \geq 1$			
Existe un divisor de 12 que no es divisor de 18			

Entonces:

- *la negación de una frase que empieza por "existe..." es ...*
- *la negación de una frase que empieza por "todos los..." es ...*

Ejercicio 8 (Negación)
Decir si cada afirmación es verdadera o falsa y negarla:

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0.$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ x + 1 > x.$
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^3 = x.$
4. $\exists x \in \mathbb{R},\ 2x + 1 = x.$

Ejercicio 9 (Contrarrecíproco)
Escribir el contrarrecíproco de cada una de los enunciados siguientes:

1. *Si es el 1^{ero} de enero entonces el museo está cerrado.*
2. *Un número entero que es múltiplo de 6 es también múltiplo de 3.*
3. *Si un número es mayor que 7 entonces es mayor que 4.*
4. *Dado $x \in \mathbb{R}$, si $x > 0$ entonces $x + 4 > 0$.*
5. *Si un triángulo ABC es rectángulo en A entonces $BC^2 = AC^2 + AB^2$.*

Ejercicio 10 (Demostraciones)
Probar que las siguientes afirmaciones son falsas.

1. *Un número siempre es inferior a su cuadrado.*
2. *Para todo par de reales a y b positivos se cumple que $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$.*
3. *Para todo par de reales a y b no nulos, $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.*
4. *Si a, b, c y d son cuatro números reales que verifican $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a - c \leq b - d$.*

5. *Si un número x verifica $-2 \leq x \leq 4$ entonces $4 \leq x^2 \leq 16$.*
6. *Para todo par de vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ se cumple que $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$.*

Ejercicio 11 (Demostración enunciados falsos)
Considerar la siguiente afirmación:

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \textit{para todo par de números reales positivos } a \textit{ y } b.$$

Para demostrar que es falsa, ¿debo probar que la igualdad nunca vale? o ¿debo hallar un par de números reales positivos a y b para los cuales no vale? Demostrar que dicha afirmación es falsa.

Ejercicio 12 (Demostración enunciados verdaderos)
Considerar la siguiente afirmación:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad \textit{para todo par de números reales positivos } a \textit{ y } b.$$

Para demostrar que es verdadera, ¿es suficiente con probar que la igualdad vale para un par de números reales positivos a y b? ¿es suficiente probar que vale para muchos pares de números reales positivos a y b? Demostrar que dicha afirmación es verdadera.

Ejercicio 13 (Demostraciones con conjuntos)
Probar o refutar las siguientes afirmaciones:

1. *Si $A \subseteq B$ entonces $B^c \subseteq A^c$.*
2. $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$
3. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
4. $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$
5. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
6. $(A \setminus B)^c = A^c \cup B^c$

Ejercicio 14 (Demostraciones con conjuntos)
Determinar cuáles de las siguientes igualdades e inclusiones son verdaderas. En caso de que una igualdad sea falsa determinar si se da alguna de las inclusiones.

1. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Ejercicio 15 (Demostraciones por absurdo)

1. *Probar que $\sqrt{2}$ es irracional.*
2. *Probar que hay infinitos números primos.*
3. *Si n no es un cuadrado perfecto entonces $\sqrt{n}$ es irracional.*