Soluciones resumidas del Práctico 2 (Ecuaciones-Inecuaciones)

Ejercicio 1

1. $\sqrt{x^2} = x$.

   Falso. (Contraejemplo: tomar $x = -1$).

2. $\sqrt{x^2+4} = |x| + 2$.

   Falso. (Contraejemplo: tomar $x = 1$).

3. $\frac{x}{x+y} = \frac{1}{1+y}$.

   Falso. (Contraejemplo: tomar $x = 0, y = 1$).

4. $\frac{16+x}{16} = 1 + \frac{x}{16}$.

   Verdadero.

5. $\frac{1}{x^{-1}+y^{-1}} = x + y$.

   Falso. (Contraejemplo: tomar $x = 1, y = 1$).

6. $\frac{2}{4+x} = \frac{1}{2} + \frac{2}{x}$.

   Falso. (Contraejemplo: tomar $x = 1$).

7. $(x^3)^4 = x^7$.

   Falso. (Contraejemplo: tomar $x = 2$).

8. $6 - 4(x+y) = 6 - 4x - 4y$.

   Verdadero.

Ejercicio 2 *Resolver en $\mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones y expresarlas de forma factorizada si es posible: En todas las ecuaciones de este ejercicio el dominio son todos los reales ($D = \mathbb{R}$).*

1. $x^2 + 9x - 10 = 0$

   Solución: *Conjunto solución $S = \{-10, 1\}$. Factorización: $x^2 + 9x - 10 = (x+10)(x-1)$*

2. $x^2 + 9 - 6x = 0$

   Solución: *Conjunto solución $S = \{3\}$. Factorización: $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, 3 es raíz doble*

3. $2x^2 - 50 = 0$

   Solución: *Conjunto solución $S = \{-5, 5\}$. Factorización: $2x^2 - 50 = 2(x-5)(x+5)$*

4. $-2x^2 = 8x$

   Solución: *Conjunto solución $S = \{-4, 0\}$. Factorización: $-2x^2 - 8x = -2x(x+4)$*

5. $6x^2 + 36x = 0$

   Solución: *Conjunto solución $S = \{-6, 0\}$. Factorización: $6x^2 + 36x = 6x(x+6)$*

6. $3x^2 + 5x + 1 = 0$

   Solución: *Conjunto solución $S = \{\frac{-5-\sqrt{13}}{6}, \frac{-5+\sqrt{13}}{6}\}$. Factorización: $3x^2 + 5x + 1 = 3(x - \frac{-5-\sqrt{13}}{6})(x - \frac{-5+\sqrt{13}}{6})$*

7. $-x^2 + 2x - 1 = -2x^2 + x - 3$

   Solución: *Conjunto solución $S = \emptyset$, no se puede factorizar $x^2 + x + 2 = 0$*

8. $x^2 + 6x - 1 = (x-1)(x+7)$

   Solución: $6 = 0$ *no tiene solución. Conjunto solución $S = \emptyset$, no se puede factorizar.*

9. $x^3 + 27 = 0$
Solución: *Conjunto solución* $S = \{-3\}$. *Factorización:* $x^3 + 27 = (x+3)(x^2 - 3x + 9)$.

10. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$
Solución: *Conjunto solución* $S = \{1\}$. *Factorización:* $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$, *1 raíz triple.*

11. $x^3 + 3x^2 + x - 1 = 0$
Solución:
Conjunto solución $S = \{(-1-\sqrt{2}), -1, (-1+\sqrt{2})\}$. *Factorización:* $x^3 + 3x^2 + x - 1 = (x+1)(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$
.

12. $8x^3 + 14x^2 - 5x - 2 = 0$ *sabiendo que 1/2 es raíz.*
Solución: *Utilizando el mismo procedimiento que en caso anterior, llegamos a que el polinomio que contiene las raíces restantes es* $Q(x) = 8x^2 + 18x + 4$. *Observemos que, para hallar sus raíces, podemos dividir todos los coeficientes por 2 para más comodidad en las cuentas. Las raíces de Q son* -2 *y* $-\frac{1}{4}$, *por lo que las raíces de* $P(x)$ *son* $\frac{1}{2}$, -2 *y* $-\frac{1}{4}$. *Conjunto solución* $S = \{1/2, -2, -1/4\}$. *Factorización:* $8x^3 + 14x^2 - 5x - 2 = 8(x - \frac{1}{2})(x+2)(x+\frac{1}{4})$.

Ejercicio 3 *1.* a) $\frac{2^{3x+4}}{16^{x^2+3}} = 1$. *Dominio* $D = \mathbb{R}$
Solución:
$\frac{2^{3x+4}}{16^{x^2+1}} = 1 \Leftrightarrow 2^{3x+4} = (2^4)^{x^2+1} \Leftrightarrow 3x + 4 = 4(x^2+1) \Leftrightarrow 4x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *o* $x = 3/4$.
Conjunto solución $S = \{0, 3/4\}$.

b) $3^{2x-5} = (27)^{x^2+1}$.*Dominio* $D = \mathbb{R}$
Solución:
$3^{2x-5} = 27^{x^2+1} \Leftrightarrow 3^{2x-5} = (3^3)^{x^2+1} \Leftrightarrow 2x - 5 = 3(x^2-2) \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ *o* $x = -1/3$.
Conjunto solución $S = \{1, -1/3\}$.

c) $\frac{4^{x-1}}{2^{x+2}} = 128$. *Dominio* $D = \mathbb{R}$
Solución:
$\frac{4^{x-1}}{2^{x+2}} = 128 \Leftrightarrow \frac{2^{2x-2}}{2^{x+2}} = 128 \Leftrightarrow 2^{2x-2} = 2^7(2^{x+2}) \Leftrightarrow 2x - 2 = x + 9 \Leftrightarrow x = 11$
Conjunto solución $S = \{11\}$.

d) $(\frac{9}{4})^{-x^2/2} = \frac{3}{2}(\frac{8}{27})^{\frac{x-1}{3}}$. *Dominio* $D = \mathbb{R}$
Solución:
$(\frac{9}{4})^{-x^2/2} = \frac{3}{2}(\frac{8}{27})^{\frac{x-1}{3}} \Leftrightarrow (\frac{2^2}{3^2})^{x^2/2} = \frac{3}{2}(\frac{2^3}{3^3})^{\frac{x-1}{3}} \Leftrightarrow (\frac{2}{3})^{x^2} = (\frac{2}{3})^{x-2} \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 0$
no tiene raíces reales y por lo tanto la ecuación original no tiene solución en los reales. Conjunto solución $S = \emptyset$.

e) $\frac{1}{3}log(2x-1) = log(5) - log(3)$
Solución:
Primero observamos que $2x-1$ *debe ser positivo, o sea,* $x > \frac{1}{2}$. *Dominio* $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 1/2\} = (1/2, +\infty)$
$\frac{1}{3}log(2x-1) = log(5) - log(3) = log(\frac{5}{3}) \Leftrightarrow log(2x-1) = 3log(\frac{5}{3}) = log((\frac{5}{3})^3)$
$\Leftrightarrow 2x - 1 = (\frac{5}{3})^3 = \frac{125}{27}$, *es decir* $x = \frac{76}{27}$. *Conjunto solución* $S = \{\frac{76}{27}\}$.

f) $\log_5(2a+1) - \log_5(3a) = 0$
Solución:
Primero observamos que $2a+1$ *y* $3a$ *deben ser positivos, o sea,* $a > 0$. *Dominio* $D = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\} = (0, +\infty)$
$\log_5(2a+1) - \log_5(3a) = 0 \Leftrightarrow \log_5 \frac{2a+1}{3a} = 0 \Leftrightarrow \frac{2a+1}{3a} = 1 \Leftrightarrow a = 1$
Conjunto solución $S = \{1\}$.

g) $\log_2(x+6) = 3$
Solución:
Primero observamos que $x+6$ *debe ser positivo, o sea,* $x > -6$. *Dominio* $D = \{x \in \mathbb{R} : x > -6\} = (-6, +\infty)$

$\log_2(x+6) = 3 \Leftrightarrow 2^3 = x+6 \Leftrightarrow x = 2$
Conjunto solución $S = \{2\}$.

h) $\ln(x) + \ln(x+2) = \ln(x+8)$
Primero observamos que $x, x+2, x+8$ *deben ser positivos, o sea,* $x > 0$. *Dominio* $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = (0, +\infty)$
Solución:
$\ln(x) + \ln(x+2) = \ln(x+8) \Leftrightarrow \ln(x(x+2)) = \ln(x+8) \Leftrightarrow x(x+2) = x+8 \Leftrightarrow x^2 + x - 8 = 0$
Las raíces del polinomio son $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{33})$ *y* $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{33})$ *pero solo la segunda es solución de la ecuación ya que es positiva. Conjunto solución* $S = \left\{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{33})\right\}$.

Ejercicio 4

1. $|x+3| = |2x+1|$. *Dominio* $D = \mathbb{R}$.
Solución:
$|x+3| = |2x+1| \Leftrightarrow x+3 = \pm(2x+1)$. *Si* $x+3 = 2x+1$ *resulta que* $x = 2$. *Si* $x+3 = -(2x+1)$, *resulta que* $x = -4/3$. *Conjunto solución* $S = \{2, -4/3\}$.

2. $|3x+5| = 1$. *Dominio* $D = \mathbb{R}$.
Solución:
Aqui hay 2 posibilidades $3x+5 = \pm 1$ *y entonces* $x = \frac{-4}{3}$ *o* $x = -2$.*Conjunto solución* $S = \{-2, -4/3\}$.

3. $\left|\frac{2x-3}{x+2}\right| = 3$. *Dominio* $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
Solución:
$\left|\frac{2x-3}{x+2}\right| = 3 \Leftrightarrow |2x-3| = 3|x+2| = |3(x+2)| \Leftrightarrow 2x-3 = \pm 3(x+2)$
Si $2x-3 = 3(x+2)$ *entonces* $x = -9$. *Si* $2x-3 = -3(x+2)$ *entonces* $x = -\frac{3}{5}$. *Conjunto solución* $S = \{-9, -3/5\}$.

4. $\left|\frac{-x+2}{x-3}\right| = |2x-1|$. *Dominio* $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 3\} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
Solución:
$\left|\frac{-x+2}{x-3}\right| = |2x-1| \Leftrightarrow |-x+2| = |2x-1||x-3| = |(2x-1)(x-3)|$. *Nuevamente analizamos los dos casos:*
Si $-x+2 = (2x-1)(x-3)$ *entonces* $x = \frac{3\pm\sqrt{7}}{2}$.
Si $-x+2 = -(2x-1)(x-3)$ *entonces* $x = \frac{4\pm\sqrt{6}}{2}$.
Conjunto solución $S = \left\{\frac{3-\sqrt{7}}{2}, \frac{4-\sqrt{6}}{2}, \frac{3+\sqrt{7}}{2}, \frac{4+\sqrt{6}}{2}\right\}$.

Ejercicio 5

1. *¿Cuál es el número que al restarle su tercio a su doble se obtiene 15?* **Solución:** *El número es 9.*

2. *La suma de tres números impares consecutivos es igual a 99. Hallar la suma del menor y el mayor.* **Solución:** *Los impares en cuestión son 31,33 y 35. La suma es 31 + 35 =66.*

3. *Encontrar dos números impares consecutivos tales que su producto sea igual a 195.* **Solución:** *Los números son 13 y 15.*

4. *¿Cuáles son los dos números naturales consecutivos tales que la suma de sus cuadrados de 113?* **Solución:** *Los números son 7 y 8.*

5. *Un joven conductor de un vehículo interrogado por la policía acerca de su edad, respondió: el doble del cuadrado de la edad que tendré dentro de cuatro años, menos el triple del cuadrado de la edad que tenía hace dos años, es el doble de la edad que tendré dentro de 54 años.*

   - *Determinar la edad del joven al responder la pregunta.* **Solución:** *Su edad es 22 años.*

Ejercicio 6

1. *Para un evento se encargaron 500 sándwiches con los siguientes gustos: queso, olímpico y atún. Se sabe que la cantidad de sándwiches de queso es el triple que la cantidad de olímpicos y la cantidad de sándwiches olímpicos supera en 25 a la cantidad de los de atún. ¿Cuántos sándwiches hay de cada gusto?* **Solución:** *Hay 105 olímpicos, 80 de atún y 315 de queso.*

Soluciones resumidas del Práctico 2 (Ecuaciones-Inecuaciones)

2. *Hallar la medida de los lados de un rectángulo cuya área es 8 y cuyo lado menor mide la mitad del lado mayor.* **Solución:** *El largo es 4 y el ancho 2.*
3. *El costo de una entrada al cine es de* 300 *pesos para adultos y es* 200 *para niños. Si el viernes fueron 250 personas y se recaudaron* $65\dot{0}00$ *pesos. ¿Cuántos adultos y cuántos niños concurrieron ese día al cine?* **Solución:** *Concurrieron 150 adultos y 100 niños.*
4. *En un estadio hay 3400 personas. Por cada 5 visitantes hay 12 locales. ¿Cuántos locales asistieron?* **Solución:** *Asistieron 2400 locales.*